M. BIBLIOTHECA K.
N. FF. PRÆDICATORUM.
BENITIÆ.
102 No

Digitized by the Internet Archive
in 2025 with funding from
Graduate Theological Union

https://archive.org/details/institutionesphi34jacq

INSTITVTIONES

PHILOSOPHICAE

AVCTORE

FRANCISCO IACQUIER
ex Minimorum Familia, primariarum per Europam academiarum socio, in lyceo romano, et in collegio urbano de propaganda fide professore.

AD VSVM SCHOLAE VALENTINAE.

St. Albert's College Library

TOMVS III.

VALENTIAE
EX OFFICINA BENEDICTI MONFORT
CIↃIↃCCC.
SVPERIORVM PERMISSV.

B
802
S34
1800
v.3-4

AVCTOR LECTORI.

Physicam inter geometricamque doctrinam tam arcta est necessitudo, ut apud omnes cultiores viros tamquam vanissimum merito habeatur physicae studium geometriae praesidio destitutum. Quae quum ita sint, nemo mirari debet, quod a studiosis adolescentibus sacrae licet theologiae destinatis, arithmeticae et geometriae elementa requiram. Si enim his careant doctrinae physicae adiumentis, satius est, eos huic praeclarissimo studio valedicere omnino, *melius est nihil scire, quam male scire*. Tale enim cognitionis, potius dicam ignorantiae, genus mentis aciem hebetat, rectumque iudicium corrumpit, et omni studiorum generi nocet plurimum. At me fortasse reprehendent censores aliqui, quod nova elementa ediderim, quum nihil fere in orbe literario frequentius sit elementorum libris. Neque talem me esse, quis sibi falso persuadeat, ut de aliis elementis minus laudabiliter sentiam, huncque meum libellum supra alios omnes extollam, quod tamen a plerisque elementorum auctoribus nimis arroganter factum video. Et quidem variis elementis, ratione licet et methodo diversissimis, suam iustam laudem concedendam esse, facile quisque fatebitur; si varias attenderit adolescentum conditiones atque voluntates. Alii sublimiorem physicam mathesimque universam addiscere et funditus haurire, sibi proponunt. Alii autem aliis

studiis gravioribusque negotiis nati institutiones geometricas strictim leviterque tantum arripiunt, quantum scilicet expoliendo perficiendoque ingenio satis est. Alii ultra geometriam, quam *praticam* vocant, nolunt progredi, illaque minus nobili geometriae parte contenti sunt. Alii tandem alios fines aliaque consilia in animo habent. ¿Quid ergo mirum, quod ego arithmeticae et geometriae elementa ad meas physicas institutiones accommodatissima proponam? At quaecumque sit elementorum ratio, demonstrationis severitas religiose semper tenenda est, neque obscura multarum propositionum farragine iuvenum mens est obruenda, sed splendidiori accuratioris geometriae lumine illustranda. Monendi ergo sunt studiosi adolescentes, ut ab iis caute abstineant elementis, quae nec satis accurata methodo conscripta sunt, nec firmissimo demonstrationum robore munita. Perniciosissima quidem sunt studiosae inventuti talia elementa, quae eos habent auctores, quorum doctrina tota in elementis continetur. Verum si recto proportionum ordine nexuque necessario colligatae fuerint demonstrationes omnes; ex hoc studio diligenter, et, ut par est, instituto, in quolibet scientiarum genere fructum maximum sine ulla dubitatione polliceor. Nec quidquam existimationis geometrico studio detrahi debet, si aliqui exstiterint in rebus geometricis etiam versatissimi, in vulgari tamen agendi ratione et in rebus quoque familiarissimis omnino inepti. Id quidem, quod summa iniuria obiici solet, tribuendum est praecipiti quorum-

dam geometrarum iudicio. Non desunt, fateor, celeberrimi etiam viri, qui in rebus mathemeticis toti occupati, necessaria rerum tractandarum vel gerendarum principia et elementa non satis tenent; atque hinc mirum non est, quod aliquando errent graviter geometrarum non geometriae vitio. Et re quidem ipsa, si fons erroris probe attendatur, vitium in principiis, non vero in *consequentiis* latere deprehenditur. Contra autem alii homines non pauci veris utuntur principiis, errant autem in *consequentiis*. Itaque huc mihi maxime reducendum videtur geometrici studii pretium: si nempe duos fingere liceat homines eadem ingenii vi eodemque conditionum gradu praeditos, atque *ceteris*, ut vulgo dicunt, *paribus*, unus autem sit geometriae auxilio adiutus, alter autem destitutus; facile mihi persuadeo, virum geometram in quolibet scribendi genere, in tractanda etiam quaestione theologica multo excellentiorem futurum. Neque enim quae prima sunt, postrema dicet, et vicissim, nec quae perspicua sunt et illustria, minus accurata methodo obscurabit, aut quae abstrusa sunt et involuta, densiori caligine non obvolvet. Verum ne geometriae studio nimis tribuere videar, et hanc quam maxime amo, disciplinam magnificentius praedicare, de iis non loquor melioris ingenii viris, in quibus excellens iudicium meditatione et experientia subactum atque perfectum miramur, sive graviora tractanda sint negotia, sive studiis quibuscumque danda sit opera. Has iustissimas geometriae laudes attigisse satis sit ad excitandam adolescentum

voluntatem. Faxit D. O. M. ut hoc meo qualicumque labore utantur, non in rebus physicis tantum, sed etiam ut in studiis gravioribus, quem quidem fructum maxime exopto, ratiocinandi vim accuratiori methodo augeant atque amplificent, huius tamen sanctissimi dogmatis probe memores: *captivare intellectum in obsequium fidei.*

Ceterum monendum superest, scholia et appendices in his elementis praetermitti posse ab iis, qui minori pollent intelligendi facilitate; minus enim necessaria sunt haec additamenta.

LECTORI.

Matheseos elementa iacquierana, quae hoc tertio tomo continentur, aliquatenus a ceteris eorumdem editionibus discrepantia, L. O, adinvenies. Ne autem variationem temere inconsultove factam iudices; oportet, illius causas intelligas. Iacquierius elementa isthaec concisiori et obscuriori stilo elucubraverat, quam ut tirones studiosi ferre possent: quod sane nemo mirabitur, qui noverit, viros in sublimiori mathesi exercitatos ut plurimum dedignari prolixiores consecutiones, quae ab aliis in eo studio prima stipendia merentibus praecipue desiderantur. Hunc autem institutionum suarum naevum Iacquierium animadvertisse nobis persuasum est, experientia, ut opinamur, ipsum edocente, doctrinam a se antea traditam ad tironum captum non plane accommodatam fuisse: eaque de causa factum putamus, ut elementa matheseos simplicius accuratiusque tradiderit in editione sua romana ann. 1777, quae propterea et emendatior est, et ab aliis haud parum diversa. Atque haec est prima variationis nostrae ratio. Nempe inter romanam istam aliasque editiones ea seligere curavimus, quae accuratioris simplicioris-que doctrinae specimen exhiberent, a Iacquierii tamen littera nec hilum recedentes.

Sed neque in editione ista romana Auctor noster ita elementa sua explanavit, ut tirones non omnino ullas consecutiones desiderent, quibus de-

monsrrationum vis sibi magis nota fiat atque perspicua. Quapropter operae pretium duximus, nonnulla, etsi diverso charactere notata, demonstrationibus interponere, quibus tironum intelligentia iuvaretur ad illarum vim sentiendam. Pleraque praeterea confuse, et aliqua inaccurate, ne dicam falso, tradita in editione romana ceterisque remansere, quae satius duximus penitus corrigenda. Eiusmodi sunt, quae habentur de exponentis definitione, de notione laterum homologorum in triangulis, de quantitatibus pure geometricis tamquam incommensurabilibus habitis, aliisque, quae partim expunximus, partimque notavimus. Eodem etiam consilio, elementa scilicet matheseos edendi, quantum fieri possit, perspicua atque ad tironum captum accommodata, tabulam unam figurasque adiecimus, quibus eadem Iacquierana doctrina quasi digito indicari ac demonstrari possit. Mutationes tamen omnes diverso charactere exhibuimus, ne tibi copiam adhiberemus de labore nostro iudicandi. Haec omnia tibi, ut existimamus, non displicitura, L. B.., te monitum voluimus, ut has iacquierianas matheseos institūtiones inoffenso pede percurras. Vale.

INDEX.

ARITHMETICA ET ALGEBRA.

CAPVT I. *De praecipuis utriusque arithmeticae operationibus generatim consideratis.* Pag. 1
CAPVT II. *De quattuor primis arithmeticae operationibus in numeris integris.* 8
PROBLEMA I. *Numeros integros addere, sive in unam summam colligere.* ibid.
PROBL. II. *Numeros integros subtrahere.* 9
PROBL. III. *Numeros integros multiplicare.* 11
PROBL. IV. *Numeros integros dividere.* 14
CAPVT III. *De quattuor praecedentibus operationibus in arithmetica speciosa absolvendis.* 23
PROBL. I. *Quantitates litterales addere.* ibid.
PROBL. II. *Quantitates litterales subtrahere.* 26
PROBL. III. *Quantitates litterales multiplicare.* 27
PROBL. IV. *Quantitates litterales dividere.* 30
CAPVT IV. *De iisdem operationibus in numeris fractis.* 35
De fractionibus decimalibus. 47
CAPVT V. *De radicum extractione.* 52
De quantitatibus surdis sive irrationalibus, et incommensurabilibus. 62
CAPVT VI. *De proportionibus.* 71
De logarithmis. 82
APPENDIX. *De aequationibus.* 86
De quantitatibus imaginariis. 92

GEOMETRIA.

PROOEM. *De definitione et diviſione geometriae.* 101
SECTIO I. *De geometria linearum.* 109
CAPVT I. *De lineis rectis, quod ad mutuam poſitionem conſideratis, nullum tamen ſpatium, ſeu nullam figuram terminantibus.* ibid.
CAPVT II. *De linearum rectarum reſpectu circuli poſitione.* 113
CAPVT III. *De lineis rectis, quae ſpatium claudunt, ſeu de figurarum rectilinearum proprietatibus.* 123
CAPVT IV. *De linearum ratione, ſeu de lineis proportionalibus.* 134
APPENDIX. *De proportionum uſu in triangulorum reſolutione, ſive de Trigonometria.* 145.
SECTIO II. *De Geometria ſuperficierum.* 157
CAPVT I. *De praecipuis planarum ſuperficierum proprietatibus.* ibid.
CAPVT II. *De ſuperficierum menſura.* 161
SECTIO III. *De geometria ſolidorum.* 169
CAPVT I. *De ſolidorum geneſi et proprietatibus.* ibid.
CAPVT II. *De ſolidorum menſura.* 176.
APPENDIX. *De lineis curvis.* 187

ELEMENTA ARITHMETICAE TVM VVLGARIS TVM SPECIOSAE.

CAPVT I.

De praecipuis utriusque arithmeticae operationibus generatim consideratis.

DEFINITIO I.

A*Rithmetica* generatim definitur : *scientia computandi.* Computatio autem vel fit per vulgares numeros , ac proinde et determinatos 1 , 2 , 3 , cet. vel per alphabeti litteras a , b , c , cet. quae numerum quemlibet aut quantitatem quamlibet designant. Prima computandi ratio *arithmetica* simpliciter dicitur : altera autem vocatur arithmetica *speciosa* vel *algebra* , et convenientius a Newtono *arithmetica universalis* appellatur.

Scholion. Has quidem definitiones secundum vulgarem docendi consuetudinem praemittimus. Monendum tamen est , scientias quasdam vix clare definiri posse , nisi earumdem scientiarum diligens praecedat analysis atque accurata explica-

tio. Ita in praesenti casu, explicatis arithmeticae et algebrae operationibus, recte iam dicere liceret: hanc, quam vobis explicavimus, scientiam esse, quae *arithmetica* vel *algebra* vocatur.

Def. II. Per *numerum* arithmetici intelligunt *unitatum multitudinem.* At accuratius a Newtono definitur numerus: *relatio seu ratio quantitatis cuiusvis ad aliam eiusdem generis quantitatem.*

Scholion. Quae quidem definitio, ut in bono lumine collocetur, observandum est, quantitatem quamlibet cum alia eiusdem generis quantitate comparatam vel ea minorem esse, vel maiorem, vel tandem ipsi aequalem; hoc est, magnitudinem aliquam vel in alia contineri, vel aliam certo modo continere. Hic autem modus, quo magnitudo aliqua aliam continet, vel in ea continetur, *numerus* dicitur. E. g. numerus 3 exprimit rationem magnitudinis alicuius ad aliam minorem, quae pro unitate adsumitur, et in maiori ter continetur. Contra autem si quantitas maior 3 pro unitate adhibeatur, erit quantitas 1 tertia pars quantitatis maioris, quae tamquam unitas consideratur, sive 1 ter in quantitate maiori continetur.

Def. III. Inde autem intelligitur, quid sit numerus *integer*, quid numerus *fractus*. Integer dicitur, *quem unitas metitur*. Fractus, *qui est pars unitatis*. Ita 1, 2, 3, cet. sunt numeri integri; sed dimidia, tertia, quarta, cet. pars unitatis sunt numeri fracti. Ita autem exprimi solent numeri fracti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, cet. Ratio, quam modo definivimus, si nempe consideretur, quomodo quanti-

tas una alteram contineat, dicitur *geometrica*. Vocatur autem *arithmetica*, si excessum tantummodo quantitatis unius supra aliam consideremus. Duarum rationum aequalitas *proportio* dicitur vel *geometrica* vel *arithmetica*, pro diversa rationum qualitate. Quare ad habendam proportionem quattuor quantitates requiruntur; et prima ad secundam esse dicitur, ut tertia ad quartam.

Scholion 1. Numeri omnes in vulgari arithmetica decem notis sive characteribus designantur. Sunt autem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, quorum ultimus *cyphra* sive *zero* appellatur. Harum notarum varia est significatio non solum ex diversa illarum figura, sed etiam ex diverso, quem occupant, loco. Quae ad dexteram postremae occurrunt, designant unitates; quae proxime praecedunt, unitatum decades; exinde centenarii sequuntur, millenarii; et sic deinceps per decades et centenarios progrediendo. Huic autem usui potissimum cyphra destinatur. Quum nempe ipsa nullum designet numerum, auget tamen reliquarum notarum significationem, longius illas ab extremo in dextera numero versus sinistram removens. Sic unitatis nota, quae sola unicam designaret unitatem, beneficio unius vel duplicis cyphrae in secundum aut tertium locum reiecta, denas unitates aut centenas significabit. Breviores numeri facile leguntur. Ita 247 exprimunt ducentas quadraginta septem unitates. At in prolixioribus numeris aliquo opus est artificio. Ita si legere oporteat longiorem numerum:

. 3 . 2 . 1 .
3 242 578 562 914 020 467 212. Hunc ita

divides a postremis dexterioribus numeris exorsus. Nempe tres postremos divides a praecedentibus puncto superius apposito, tribus sequentibus adscribes 1, et sic deinceps reliquis ternariis punctum alternatim appones vel numerum; ita tamen, ut numeri unitate semper augeantur, quemadmodum heic factum vides. His peractis, quamlibet notarum classem perinde leges, ac si sola esset; et ubi punctum invenies, dic mille; ubi 1, dic decies centena millia, seu, ut vulgo loquimur, *millionem*; ubi 2, dic milliones millionum sive *billiones*; ubi 3, dic *trilliones*, et sic deinceps. Sic itaque legendus est numerus praecedens: ter mille ac ducenti quadraginta duo trilliones, quingenta septuaginta octo millia ac quingenti sexaginta duo billiones, nongenta quattuordecim millia ac viginti milliones, quadringenta sexaginta septem millia, bis centum ac duodecim.

Scholion II. Vulgares explicavimus arithmeticae characteres, quorum auctores feruntur astronomi arabes. Aliquid iam dicendum est de notis, quae *romanae* appellantur. Notae illae, quarum in physicis institutionibus usus recurret, maiusculis alphabeti litteris exprimuntur. His characteribus *romanorum* nomen factum fuisse creditur, quod eos in monetis publicisque monumentis usurpaverint veteres romani. Litterae, quae numeros romanos componunt, sunt septem sequentes I, V, X, L, C, D, M. Harum notarum haec est significatio. I, unitas: V, quinque: X, decem: L, quinquaginta: C, centum: D, quingenta: M, mille. Si duo I scribantur in hunc modum II, aequiva-

lent binario ; si tria ſcribantur III , significant ternarium ; numerus quatternarius ita exprimitur IV ; et numerus novenarius hoc modo IX : nempe unitas numeris V , X praefixa eos mulctat unitate. Verum ad exprimendos numeros vulgares 6, 7, 8 , ſcribi ſolet VI , VII , VIII. Si numero L vel C praemittatur X ; numeri illi decade minuuntur ; ita XL significant 40 , et XC 90. Contra autem ſi numerum L ſequatur X in hunc modum LX ; numerus praecedens augetur decade , significans 60 cet. Aliquando numerus 400 expreſſus fuit litteris CD , ſed raro. Praeter litteram D , quae exprimit 500 , idem numerus ſignificatur etiam hoc modo ıɔ. Ita etiam loco M , aliquando ſcribitur cıɔ. Eodem modo exprimi poteſt 600 per ıɔc ; et 700 per ıɔcc cet. Si litterae c , et ɔ ante et poſt addantur , numerus cıɔ augetur in ratione decupla. Ita ccıɔɔ ſignificat 10000 , cccıɔɔɔ 100000 , cet. Hi erant communes arithmeticae characteres apud veteres romanos , qui etiam numerum millenarium deſignare ſolebant adſcripta numeris millenario minoribus lineola ; hoc modo $\overline{\mathrm{V}}$, et ſignificat 5000 ; $\overline{\mathrm{LX}}$, et deſignat 60000 Similiter $\overline{\overline{\mathrm{M}}}$ aequivalet 1000000 , et $\overline{\overline{\mathrm{MM}}}$ deſignat 2000000. A recentioribus nonnullis ſcriptoribus variationes aliquae fuerunt adhibitae ; ita litteris IIX deſignant 8 , litteris XXCIX exprimunt 89. Qua ratione horum numerorum ope computationes ſuas iniverint veteres romani , nos omnino latet. Aliquam procul dubio habuerunt arithmeticam , quam quidem invenire , aut aliam non mul-

tum dissimilem substituere, problema est a viris arithmeticae et antiquitatis studiosis solvendum.

Scholion III. Quoniam numeri nihil aliud sunt, quam magnitudinum rationes quaedam certis signis distinctae; evidens est, arithmeticam sive scientiam numerorum esse artem diversas illas rationes inter se combinandi, illasque certis characteribus distinguendi. Hinc nascuntur arithmeticae operationes praecipuae. Etenim diversae numerorum combinationes huc revocari possunt, ut nempe mutuus eorum excessus vel modus, quo se invicem continent, expendatur et adsignetur. Ex his autem intelliguntur mox explicandae quattuor vulgares arithmeticae operationes: *additio*, *subtractio*, *multiplicatio*, *divisio*.

Def. IV. Additio vocatur illa arithmeticae operatio, qua plures numeri simul colliguntur. Subtractio autem dicitur operatio, qua numeri a se invicem subtrahuntur. Ita si addantur 2 et 3, ut efficiantur 5; vel minor numerus 2 a maiori 3 subtrahatur, ut remaneat 1; in primo casu dicitur additio, in altero autem subtractio.

Scholion. Patet, in additione et subtractione considerari mutuum numerorum excessum. Etenim in additione excessus summae ab alterutro numero innotescit; in subtractione autem mutua numerorum differentia investigatur.

Def. V. Multiplicatio appellatur illa arithmeticae operatio, qua idem numerus sibimetipsi pluries additur. Ita si 3 per 4 multiplicari debeat, idem est, ac si 4 sibi ipsi ter addatur, vel 3 sibi ipsi quatter adiungatur; prodibitque 12. Divi-

sio est arithmeticae operatio, in qua numerus unus ab alio subtrahitur, quantum fieri potest, ita numerus 4 ex 12 ter subtrahi potest.

Scholion I. Itaque patet, in multiplicatione et divisione considerari modum, quo numeri sese mutuo continent. Ita in praecedenti multiplicatione innotescit, numerum 12 ter continere numerum 4: per divisionem autem demonstratur, numerum 4 ter contineri in 12.

Scholion II. Ex his evidens est, multiplicationem nihil aliud esse, quam additionem compositam; atque etiam divisionem nihil aliud esse, quam compositam subtractionem. Quare ad duas dumtaxat revocari possunt quattuor vulgares arithmeticae operationes. Hinc arithmeticae operationes accurate omnino definivit Newtonus: *compositionem et resolutionem arithmeticam*; quae quidem definitio ex ipsa arithmeticarum operationum natura derivat. Quamvis autem numeri sint rationes geometricae, ex dictis tamen evidens est, additionem et subtractionem proprie revocari ad rationem arithmeticam; multiplicationem vero et divisionem ad rationem geometricam referri. Ceterum praeter vulgares quattuor enumeratas operationes aliae sunt plurimae; sed hae omnes ad primas referuntur, ut ex dicendis manifestum fiet. Heic autem regulas arithmeticae generatim considerasse satis sit. Patet autem, hanc, quam tradidimus arithmeticae notionem, arithmeticae speciosae communem esse. Itaque licet arithmeticae nomen generatim usurpemus; illud tamen de arithmetica speciosa intelligi quoque volumus. Iam ve-

ro universam arithmeticae utriusque doctrinam breviter et distincte explicemus, quantum postulant nostrarum institutionum necessitas atque iniuncta brevitas.

CAPVT II.

De quattuor primis arithmeticae operationibus in numeris integris.

I.

Prima arithmeticae operatio dicitur *additio*, quae ex praecedentibus satis intelligitur. Totam huius operationis praxim declarabimus atque demonstrabimus.

PROBLEMA I.

NVMEROS INTEGROS ADDERE, SIVE IN VNAM SVMMAM COLLIGERE.

Exempl.
23561
392
8768
49321
———
82042

II. Addendi proponantur numeri in hoc exemplo expressi. Quattuor numerorum series ita alias aliis subscribe, ut unitates unitatibus subiiciantur, decades decadibus, et sic de reliquis. Tum infra omnes numeros ducta lineola, et a dextera columna exorsus dic: 1 et 2 efficiunt 3: 3 et 8 efficiunt 11: 11 et 1 efficiunt 12. Habes ergo in hac columna unam decadem unitatum, ac praeterea duas unitates. Quare scribe 2 in columna unitatum, et decadem reiicere in sequentem decadum columnam

dicens; 1 et 6 efficiunt 7; 7 et 9 efficiunt 16: 16 et 6 efficiunt 22: 22 et 2 efficiunt 24, hoc est, duas decadas decadum, sive duo centenaria, et 4 decadas. Scribe ergo 4 in loco decadum, et duo centenaria in sequentem columnam reiice: eodemque pacto in hac et reliquis operare; et tandem invenies summam quaesitam 82042.

Demonstratio ex tota operationis serie facile patet. Etenim in unaquaque columna numeri ita colliguntur, tamquam si essent unitates, ex eaque summa tot unitates in columnam proxime sequentem reiiciuntur, quot decades collectae sunt. Quod quidem faciendum esse evidens est, quum nota quaelibet ab unitatum columna ad reliquas progrediendo valorem habeat in columna sequente decuplo maiorem, quam in praecedente. Igitur in hac operatione adduntur singulae unitates, singulae decades, singula centenaria. Quare patet huius operationis ratio, quae quidem utpote per se evidens, nullo vulgarium axiomatum auxilio indigere videtur. Quamvis enim demonstrationis severitati maxime studeamus; eorum tamen imitari nolumus obscuram diligentiam, qui res evidentes ita demonstrant, ut, perlecta demonstratione, de iis fere dubitare liceat, quae antea perspicua credebantur.

PROBLEMA II.

NVMEROS INTEGROS SVBTRAHERE.

III. Secunda arithmeticae operatio dicitur *sub-*

tractio, cuius totum hoc est artificium. Vt numerum datum a dato numero subtrahas, numerum subtrahendum alteri, a quo subtrahi debet, ita subiicies, ut unitates unitatibus respondeant, decades decadibus, et sic de reliquis. Tum ab unitatibus exorsus, quamlibet inferiorem notam a superiori subtrahe, et residuum scribe infra lineolam, habebis numerum, qui sit datorum numerorum differentia. Si vero occurrat, inferiorem notam superiori maiorem esse, hanc augebis decem unitatibus, easque mutuas accipies a sinisteriori nota, quam proinde deinceps habebis tamquam unitate mulctatam. Subtrahendus proponatur numerus 4245 a numero 23897. Auferendo 5 ex 7 relinquitur numerus 2. Auferendo 4 ex 9 relinquitur 5: 2 ex 8 remanet 6. At quum numerus 4 ex 3 subtrahi nequeat; adiice huic denas unitates, et auferendo 4 ex 13, residuum habebis 9. Tum vero notam sinisteriorem proxime sequentem unitate mulctabis; hanc enim ab ea mutuam accepisti, ut denis unitatibus dexteriorem augeres: habebis ergo residuum 1; ideoque residuum totum 19652.

Exempl.

23897
4245
19652

Demonstratio satis per se constat; quum unitates ab unitatibus auferantur, decades a decadibus, cet. Nam, quod in hoc exemplo numerus 3 decem augeatur unitatibus, et numerus sequens 2 unitate mulctetur, ratio patet. Haec nempe unitas in numero 3 decadi unitatum aequalis est, earum scilicet, quibus constat idem numerus 3. Quare etiamsi unitatem dumtaxat ille amittat, huic

tamen decem accedunt. Simili modo si plures sequerentur cyphrae, ex quibus eadem de causa nulla fieri potest subtractio; ex numero proxime sinisteriori mutua accipienda est unitas, quae in cyphram dexteram translata decem unitatibus aequivalet. Rursus ex illa decade unitas in secundam cyphram transfertur, atque ita deinceps. Quare patet, cyphram dexteriorem decem unitatibus aequalem esse, ceteras vero sinisteriores aequari novenario. Itaque evidens est huius operationis ratio, nec vulgarium axiomatum ope facilius intelligitur.

Scholion. Ex additionis et subtractionis natura manifestum est, duas illas operationes sibi mutuam probationem conferre, et sese invicem confirmare. Etenim quum residuum in subtractione sit ipsa numerorum differentia; patet, minorem numerum residuo sive differentiae additum maiori numero aequalem esse. Item quum additio sit plurium numerorum adgregatum, si ex adgregato alteruter numerus auferatur; numerum alterum remanere, necessum est. Si igitur explorare velis, utrum additio rite peracta sit necne, subtractione utendum est: contra autem ad explorandam subtractionem additio adhibenda.

PROBLEMA III.

NVMEROS INTEGROS MVLTIPLICARE.

IV. Tertia arithmeticae operatio vocatur *multiplicatio*, in qua, ut patet ex capite praeceden-

ti, toties sumitur numerus multiplicandus, quoties unitas continetur in numero, per quem debet multiplicari. Singulae notae in singulas facile ducuntur, si numeri breviores sint. Sic nemo non videt, 3 in 4 ductum, sive 4 ter sumtum 12 efficere *.

At si numeros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum scribe ita, ut unitates unitatibus subiiciantur. Deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris multiplicia, initio a dextris facto. Decades, quae inter multiplicandum colliguntur, sepone adiiciendas producto ex eadem nu-

* *Producta nihilominus maiora adiuncta tabella scribimus. Signum multiplicationis est* ×.

3 × 3 = 9	4 × 3 = 12	5 × 3 = 15	6×3=18
3 × 4 = 12	4 × 4 = 16	5 × 4 = 20	6×4=24
3 × 5 = 15	4 × 5 = 20	5 × 5 = 25	6×5=30
3 × 6 = 18	4 × 6 = 24	5 × 6 = 30	6×6=36
3 × 7 = 21	4 × 7 = 28	5 × 7 = 35	6×7=42
3 × 8 = 24	4 × 8 = 32	5 × 8 = 40	6×8=48
3 × 9 = 27	4 × 9 = 36	5 × 9 = 45	6×9=54

7 × 3 = 21	8 × 3 = 24	9 × 3 = 27
7 × 4 = 28	8 × 4 = 32	9 × 4 = 36
7 × 5 = 35	8 × 5 = 40	9 × 5 = 45
7 × 6 = 42	8 × 6 = 48	9 × 6 = 54
7 × 7 = 49	8 × 7 = 56	9 × 7 = 63
7 × 8 = 56	8 × 8 = 64	9 × 8 = 72
7 × 9 = 63	8 × 9 = 72	9 × 9 = 81

meri inferioris nota in proxime sequentem superioris. Facta, quae emergunt ex singulis notis inferioris in omnes superioris, infra lineolam seorsum notentur ita, ut uniuscuiusque unitates subiiciantur numero, per quem multiplicatio peragitur. Si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quaesitum.

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Scribe 43, sub 235; tum ducta lineola, dic 3 in 5 efficiunt 15, scribe 5 sub numero multiplicante 3, et unam decadem sepone adiiciendam facto sequenti ex 3 in 3, quod est 9; cui si addas 1 habebis unam decadem, et nullas praeterea unitates, scribe igitur o: et facto ex 3 in 2, quod est 6, adiiciens 1 scribe 7. Rursus dic 4 in 5 efficiunt 20; scribe o ita, ut multiplicatori 4 subiaceat, et facto sequenti 4 in 3, quod est 12, adiiciens 2 habebis 14; scribe igitur 4: et seponens 1, dic, 2 in 4 efficiunt 8, et adiecto 1, scribe 9. Demum ducta linea, collige in unam summam hos numeros ita dispositos; eritque 10105 productum quaesitum.

Exempl.

```
  235
   43
-----
  705
 940
-----
10105
```

Demonstratio evidens est ex ipsa notarum arithmeticarum natura, si nempe in memoriam revocetur, numerorum characteres decuplo plus valere in locis sinisterioribus, quam in dexterioribus. Illico enim manifestum fiet, toties sumi in producto numerum multiplicandum, quoties unitas continetur in numero, per quem fit multiplicatio.

PROBLEMA IV.

NVMEROS INTEGROS DIVIDERE

V. Quarta arithmeticae operatio vocatur *divisio*. Quum numerus datus per alium datum dividendus proponitur, eo reducitur quaestio, ut inveniatur, quoties in numero dividendo contineatur divisor, totiesque auferatur: atque totidem unitates scribantur in numero, qui iccirco *quotus* dicitur. Haec ergo genuina est divisionis notio: nempe dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem; vel dividendus est ad quotum, ut divisor est ad unitatem.

Proponatur dividendus numerus 10105 per 43. Numero dividendo divisorem postpone lineola interiecta; tum operationem instituens in primis notis dividendi, quae exhibeant quantitatem divisori aequalem vel proxime maiorem; dic, quoties 43 continentur in 101, quotus erit 2. Scribe ergo 2 infra lineolam divisoris ad partem dexteram, et factum ex 2 in 43, sive 86 aufer ex 101, et residuo 15 notam appone 0, quae in dividendo proxime sequitur quantitatem iam divisam 101. Dic iterum, quoties 43 continentur in 150, quotus est 3, quem scribe, ut antea; et factum ex 3 in 43, seu 129 aufer ex 150. Residuo 21 adnecte sequentem no-

Exempl.

```
10105 | 43
 86   |----
---     235
 150
 129
-----
  215
  215
-----
  000
```

tam dividendi 5 : et dic iterum, quoties 43 continentur in 215, quotus erit 5, quem scribe cum aliis quoti notis, et aufer ex 215 factum ex 5 in 43, sive 215. Quum nihil ex ea divisione supersit; patet, numerum 235 illum accurate esse, qui oritur ex divisione 10105 per 43.

Tota operationis ratio facile patet, si animadvertamus, in huiusmodi operatione rem perinde se habere, ac si quaereretur, quota pars quantitatis alicuius singulis hominibus obveniret, si eam ex aequo tot hominibus distribui oporteret, quot unitates continet divisor. Nam in tota operationis serie inquirimus, quot unitates, decades, cet. singulis dari possint; iisque datis, quae dari possunt, quot adhuc distribuendae supersint. Facile autem intelligitur, post quamlibet subtractionem peractam id, quod relinquitur, antequam ulteriorem dividendi notam adiicias, divisore minorem esse oportere; nam si residuum aequale foret vel maius, divisor in quantitate iam divisa pluries contineretur, quam indicet numerus in quotum relatus. Omnis difficultas in eo sita est, quod in numeris longioribus statim non pateat, quoties divisor in dividendi notis contineatur, et tentamine utendum est. Divisor nempe per numeros ab 1 ad 9 multiplicandus est, atque numeri ex hac multiplicatione producti debent comparari cum dividendi notis, et explorandum est, quinam ex illis numeris sit proxime minor. Pones in quoto numerum, in quem ductus divisor hunc efficit numerum, ipsum vero numerum ex dividendi notis subduces. Ceterum qui in arithmetica sa-

tis fuerit exercitatus, facile coniiciet ex primis utriusque numeri notis, dividendi scilicet et divisoris, ipsum numerum pro quoto eligendum.

Probe autem observari debet in quoto notarum valor, ut in aliis arithmeticae operationibus iam antea monuimus. At in praesenti operatione, quae est omnium difficillima, rem brevi exemplo illustrabimus. Dividendus proponatur numerus 416 per 2, statim patet, in quoto contineri centenarios, decadas, et unitates. Dividatur iam 4 per 2, quotus erit 2, qui per 2 multiplicatus producit 4, quo subtracto ex 4 fit 0. Patet ergo, divisum fuisse 400 per 2. Progredior deinde ad notam sequentem 1, hoc est, dividi debet 10 per 2. Statim autem video, 2 in 10 decies non contineri; quare scribitur 0 in quoto: tum ut indicetur, quotum nullam decadem continere, tum ut primae quoti notae 2 suus servetur centenarii valor. Tandem progrediendum ad 6, qui numero praecedenti 1 apponitur, divisoque 16 per 2, habetur quotus 8, ideoque quotus totus est 208. Hinc generatim intelligitur, qua de causa in quoto scribatur cyphra, immo et plures cyphras aliquando scribi oporteat. Hac divisione peracta, nulla relinquitur in dividendo nota; si autem aliquid residui ex postrema subtractione supersit, quoto adiicienda est fractio. Ita si in exemplo praecedenti haberetur numerus 417 per 2 dividendus ita, ut numerum 417 ex aequo hominibus 2 partiri debeas, singuli acciperent nummos 208, et di-

Exempl.

```
416 | 2
4     208
---
016
 16
----
 00
```

midiam partem nummi, quae ita scribitur $\frac{1}{2}$.

Ex hactenus explicatis generatim etiam patet, satis esse primam dividendi notam per primam divisoris dividi, si in divisore et dividendo idem sit notarum numerus. Verum si dividendus plures contineat notas, persaepe necesse est, duas primas dividendi notas primae divisoris notae subiici: idque fieri debere evidens est, quoties datus notarum numerus in divisore maiorem habet valorem, quam habeat aequalis notarum numerus in dividendo. Verum si duae adhibeantur dividendi notae, per primam divisoris notam divisio semper fieri potest. Quare generatim ostenditur, quod, sumtis in dividendo tot notis, quot sunt in divisore, vel etiam, quod aliquando necesse est, nota una insuper adiecta, notarum numerus in quoto unitate excedat residuum notarum in dividendo. Inde autem facile colligitur, nullum in quoto numerum novenario maiorem esse posse. Etenim divisor decies sumtus aequalis esse non potest adsumtae dividendi parti. Nam si divisor decies sumatur, nota una augetur. At pars dividendi adsumta habet notarum numerum notarum divisoris numero aequalem vel unitate maiorem. In primo casu evidens est, dividendi partem adsumtam minorem esse divisore decies sumto, quum notarum numerum habeat unitate minorem: in secundo casu pars dividendi adsumta, si nota una versus dexteram minuatur, minor fit divisore. Quare dividendus hac nota iterum auctus minor est divisore decies sumto. *Quum nempe tam dividendi quam divisoris notae per additionem no-*

vae dexterioris decuplo maiores fiant, eadem, ac prius, manebit invicem notarum dexteram praecedentium ratio. Ideoque si in priori hypothesi dividendus minor erat divisore, minor quoque manebit, postquam utrique addita fuit dextera nota.

Divisionis rite peractae argumentum habebis, si divisorem in quotum ducas, redeatque divisus numerus; nam si non redeat, manifestum est, alicubi errorem esse admissum. Quod quidem patet ex ipsa divisionis natura: quum dividendus toties contineat divisorem, quoties unitas continetur in quoto. Quare quum quotus exprimat, quoties divisor contineatur in dividendo, si divisor per quotum multiplicetur, dividendum ipsum restitui necesse est. Ceterum patet, si divisorem accuratum habere non licuit, facto ex divisore in quotum addendum esse residuum ex ultima divisionis subtractione, ut redeat divisa quantitas. Contraria ratione evidens est, multiplicationis rite peractae haberi argumentum, si productum dividatur per multiplicandum aut per numerum multiplicatorem: in primo casu quotus fit multiplicator; in casu autem altero quotus est multiplicandus. Quum enim divisio sit multiplicationi contraria, per divisionem resolvitur, quod in multiplicatione componitur, et contra. Ceterum in multiplicatione et divisione compendia plurima usus docebit. Heic monere satis erit, multiplicationis per plures cyphras faciendae compendium haberi, si in producto scribantur tot cyphrae quot occurrunt in multiplicando et multiplicatore si-

mul ; multiplicatio autem aliarum notarum fiat secundum regulas praedictas. Item in divisione , si divisor et dividendus cyphras contineant , in dividendo delendae sunt tot cyphrae , quot occurrunt in divisore , quae etiam in ipso divisore deleri debent , et reliqua operatio peragenda , ut antea. Notandum autem est , compendium illud valere dumtaxat , si cyphrae fuerint ultimae tum divisoris, tum dividendi notae ; quod quidem manifestum est ex cyphrarum natura.

Scholion. In praesenti capite sermonem habuimus dumtaxat de numeris homogeneis sive eiusdem speciei. At pari facilitate in numeris heterogeneis seu diversae speciei absolvuntur operationes arithmeticae. Antequam vero operationes illas explicemus , definiendum est , quid per numerum *concretum*, quid per *abstractum* intelligant arithmetici. Numerus concretus dicitur , quo res aliqua determinata designatur , ita si dicas tres homines , tres horas , tres pedes cet. At si numerum 3 generatim enunciaveris, nec rem aliquam designaveris , numerus vocatur abstractus. Iam in numeris diversae speciei additio et subtractio facile intelliguntur. Probe tenenda est diversa numerorum species. Ita si addi debeant lineae , pollices, pedes , hexapedae ; sciendum est , 12 lineas pollicem unum componere , pollices 12 pedem unum, et hexapedam ex pedibus 6 constare. Vbi autem in linearum additione summa efficitur , quae 12 excedit ; tot unitates inter pollices referri debent, quot sunt numeri duodenarii ; quod vero reliquum est , seu quod duodenario minus est , in linearum

columna scribi debet ; et ita deinceps de alia qualibet numerorum specie. Similiter in subtractione tota patet operationis ratio , si quantitas subtrahenda, e.g. linearum numerus, iusto maior sit; iam ex quantitate praecedenti, pollicum scilicet, mutuo accipienda est unitas , quae duodenario numero aequivalet , atque ita reliqua operatio peragenda. Illud unicum est discrimen inter operationes arithmeticas in numeris abstractis atque in heterogeneis peragendas , quod scilicet in numerorum abstractorum additione vel subtractione unitas mutuo accepta decadi aequivaleat; at in numeris heterogeneis unitas , quae mutuo accipitur , eum retinet valorem , qui speciei suae respondeat. Haec de additione et subtractione.

Quod ad multiplicationem spectat, improprie omnino a quibusdam arithmeticis proponi videntur concretorum numerorum multiplicationes. Ita ineptum est , quod faciunt aliqui , quaerere productum ex nummis 3 , iuliis 3 , assibus 3 in nummos 3 , iulios 3 , asses 3. Etenim in eo sita est multiplicatio , ut data quaedam quantitas datis vicibus sumatur , ac proinde multiplicator debet esse numerus abstractus. Qua ratione autem quantitates diversae speciei per numerum abstractum multiplicentur , facile patet , si e. g. productum ex lineis in numerum abstractum maius sit numero duodenario , iam inter pollices reiici debent tot unitates , quod sunt numeri duodenarii , quod autem reliquum est , inter lineas scribendum. Porro quamvis in multiplicatione numerus abstractus esse debeat multiplicator , res tamen aliter se habet in

divisione; nam dividendus semper censetur numerus concretus, divisor autem vel concretus vel abstractus esse potest. Ita dividi possunt nummi 6 per nummos 2, hoc est, investigari potest, quoties 2 contineatur in 6: quotus 3 erit numerus abstractus. Potest etiam dividi numerus concretus per numerum abstractum; ita numerus 6 dividere possumus per 3, hoc est investigare possumus tertiam partem nummorum 6; et quotus erit numerus concretus, nempe nummi 2. Iam ut perspicua habeatur divisionis notio, ad ipsam definitionem redeamus. In divisione scilicet dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem, vel dividendus est ad quotum, ut divisor ad unitatem. Probe autem observari debent illae duae proportiones; licet una eademque videantur. Dividendus tamquam numerus concretus semper habetur, concretus autem vel abstractus esse potest numerus divisor. In primo casu quotus erit numerus abstractus, et locum habet prima proportio; in casu altero, ubi nempe divisor est numerus abstractus, quotus est numerus concretus, et locum habet proportio altera. Haec quidem omnia exemplo facile licebit intelligere. Si nummi 6 (*numerus concretus*) dividantur per nummos 2 (*numerum* itidem *concretum*); quotus erit numerus abstractus 3; hic enim non indicabit numerum nummorum, sed exprimet, quoties divisor continetur in dividendo; erunt nempe 6 nummi ad 2 nummos, ut numerus abstractus 3 est ad unitatem abstractam. 1. Dici autem non posset, 6 nummi (*numerus* scilicet *dividendus* et *concretus*) sunt ad quotum 3 (*numerum*

abstractum); ut nummi 2 (*numerus divisor* et *concretus*) ad 1 (*numerum abstractum*). Talis proportio nullam in mente relinqueret distinctam notionem. Quum enim numerus concretus et numerus abstractus diversi sint generis ; nulla inter eos comparatio et ratio proprie dicta institui potest.

Si divisor sit numerus abstractus, ut in casu secundo, quotus est numerus concretus, et secunda valet proportio. Ita si dividantur 6 nummi per *numerum abstractum* 3, quotus erit nummi 2 (*numerus* scilicet *concretus*); habebiturque haec proportio ; numerus concretus, nempe 6 nummi, erit ad quotum nummos 2 ; ut divisor 3 ad 1. Id vero notandum est, in utraque proportione unitatem esse semper numerum abstractum. Quare divisio sub duplici ratione considerari potest. Vel enim quaeritur, quoties quantitas una in altera eiusdem generis quantitate continetur, et hic est primus casus; vel quaeritur quantitas, quae certis vicibus in alia eiusdem generis quantitate contineatur, et hic est casus secundus. Facile autem patet ex demonstratis, quomodo numeri concreti per abstractos dividantur, aut etiam concreti per concretos, etiamsi fuerint diversae speciei. Etenim si concreti per abstractos dividantur, initio sumto ab iis, qui maiorem habent valorem, divisio ex regulis praescriptis instituatur; si autem sûpersit aliquid, ad minorem speciem reducatur. E. g. si residui fuerint pedes, reducantur in pollices, atque iterum divisio de more fiat. Si concretos numeros diversae speciei per concretos itidem diversae speciei dividi oporteat, iam numeri tum dividen-

di, tum divisoris ad minimam speciem deprimantur, quod per multiplicationem fieri manifestum est, atque divisio fiat eodem modo ac in numeris abstractis. Ceterum in multiplicatione et divisione quantitatum diversae speciei varia adhiberi possunt operandi compendia, quae sine fractionum doctrina intelligi non possunt. Divisionis notionem ex genuinis principiis iam hausimus. In operationibus arithmeticis abstrahi solet a concretis abstractisque numeris, an concreti sint vel abstracti ad maiorem operationum facilitatem. Verum ad formandam earundem operationum ideam distinctam, necesse est, ut numeris sua deinde restituatur conveniens notio.

CAPVT III.

De quattuor praecedentibus operationibus in arithmetica speciosa absolvendis.

PROBLEMA I.

QVANTITATES LITTERALES ADDERE.

I.

Quantitatibus litteralibus praefiguntur signa, quorum significationem praemitti omnino necessum est. Signum additionis est $+$, signum autem subtractionis est $-$, aequalitas duabus lineolis exprimi solet hoc modo $=$. Ita $a = a$, $a + a = 2a$, $a - a = 0$. Quantitas addenda dici solet quantitas *positiva*; quantitas autem subtrahenda vocatur *negativa*. Si quantitati litterali praefigatur numerus aliquis, hic *coëfficiens* vocatur, ita in quan-

titate litterali $2a$ numerus 2 coëfficiens appellatur. Si autem quantitas litteralis nullum numerum praefixum habeat, iam unitas tamquam illius coëfficiens censeri debet; ita $a = 1a$, ut patet. Quantitates litterales dicuntur *similes*, si easdem contineant litteras et eumdem earumdem litterarum numerum, etiamsi diversis coëfficientibus notentur, ita $+ 2a$, et $- 5a$ sunt quantitates similes. At *dissimiles* sunt quantitates a et b, atque etiam quantitates a et aa. Quantitas aliqua *ex pluribus terminis composita* dicitur, quae plures habet litteras signo + vel — connexas. Ita $a + b$ constat ex duobus terminis, et *binomium* dicitur: $a + b + c$ ex tribus terminis, et *trinomium* vocatur. Quantitas ex unico termino composita dicitur *quantitas simplex*, atque etiam *monomium*: ita a, ab, abc sunt quantitates simplices.

His praemissis definitionibus, quantitatum litteralium additio iam explicanda est. Si quantitates simplices fuerint, tota operationis ratio statim patet. Ita si a et a addi debeant, habebitur $2a$; si addere oporteat a et $2a$, summa erit $3a$, et ita deinceps. Satis nempe est in hoc casu addi coëfficientes, et coëfficientium summam quantitatibus litteralibus præfigi, eodem servato signo + vel —, si quantitates eodem signo adficiantur. At si diversa fuerint signa, iam coëfficiens minor a maiori subtrahi debet, et differentia cum maioris coëfficientis signo scribenda.

Id quidem evidens est ex negativarum et positivarum quantitatum natura. Etenim quantitates positivae quantitatibus negativis sunt directe con-

trariae. Quare si quantitates addendae similes sint, signisque contrariis adfectae, vel sese omnino destruunt, vel aliqua ex parte tantum. Nempe si quantitas una sit altera maior, destruitur in maiori quantitate pars minori aequalis, et residuum est quantitatis utriusque differentia, quae quidem differentia signo maiori quantitati praefixo adfici debet. Ita evidens est, quantitates $+ 5df$ et $- 3df$ reduci ad $+ 2df$; nam $+ 5df$ est quantitas df quinquies sumta, et $- 3df$ est quantitas df ter subtracta; sed eadem quantitas quinquies sumta, et ter subtracta reducitur ad quantitatem bis sumtam. Similiter $+ 5fm$ et $- 6fm$ reducitur ad $- 1fm$, vel ad $- fm$. Nam $- 6fm$ est quantitas fm sexies subtracta, et $+ 5fm$ est eadem quantitas quinquies addita, ac proinde quantitas fm semel subtrahitur, et remanet negativa, seu fit $- fm$. Eadem ratione operandum est in aliis quantitatibus utcumque compositis. Quantitates addendae ita disponuntur, ut similes termini sibi invicem respondeant. Singulae partes seorsum considerantur ut simplices, et additio fit, ut modo praescriptum est; summa autem infra lineolam scribitur. Sub terminis, qui sese mutuo destruunt, scribi solet stellula vel zero. Tota operatio patet ex praesenti exemplo. Si quantitates aliquae fuerint dissimiles, eas signo + vel — connectendas esse evidens est. Ita si addi oporteat a et b, vel a et b: scribendum est $a + b$, $a - b$.

Exemplum.

$$\begin{array}{rrrr} 3ab & - 5cs & - 4dr & + 2s \\ - ab & + 4cs & + 4dr & - s \\ \hline 2ab & - cs & * . & + s \end{array}$$

PROBLEMA II.

Qvantitates litterales svbtrahere.

II. In subtractione considerantur quantitates singulae subtrahendae, tamquam si haberent signum ei, quod habent, contrarium, et fit summa ex legibus iam praescriptis. Nempe in quantitate subtrahenda mutetur signum $+$ in $-$: et $-$ in $+$, et additio de more fiat. Ita subtrahitur b ex a, scribendo $a - b$. Si $b - c$ ex $a + c$ subtrahi oporteat, scribitur $a + c - b + c = a - b + 2c$. Simili modo in quantitatibus utcumque compositis operandum est. Quantitas subtrahenda inferiori loco scribitur, alia autem, ex qua subtractio fieri debet, supra apponitur. Deinde mutatis signis, ut iam dictum est, tota quantitatum series scribitur, ut postea reducitur, ut factum est in additione; habebitur quantitatum differentia infra lineolam scribenda.

Exemplum.

$$\begin{array}{l} ab + abb - dd \\ ab - bc + dd \\ \hline ab + abb - dd - ab + bc - dd \\ = abb + bc - 2dd \end{array}$$

Quod autem in quantitate subtrahenda signum $-$ mutetur in $+$, ratio facile patet. Si ex a subtrahi debeat $b - d$, scribaturque primo $a - b$, subtractio iusto maior est subtrahenda enim non proponitur tota quantitas b, sed b mulctata quantitate d, quare iusto maior est subtractio, et excessus est ipsa quantitas d, quae proinde cum signo positivo $+$ restitui debet,

et scribendum est $a-b+d$. Id vero numerorum exemplo illustratur. Si ex numero 6 subtrahendus proponatur numerus $5-3$, ex praescripta regula scribendum est $6-5+3$, hoc est, 4, reductione facta. Quod evidens est. Si enim scriberes $6-5-3$; subtraheres 8 ex 6, quod quidem faciendum non proponitur. Quum enim sit $5-3=2$, ex numero 6 subtrahi debet dumtaxat numerus 2. Ceterum patet, in calculo litterali non secus at in arithmetico additionem et subtractionem sibi mutuam probationem praebere; ita ut operatio una per alteram mutuo exploretur.

PROBLEMA III.

QVANTITATES LITTERALES MVLTIPLICARE.

III. Signum multiplicationis est $\times$, quod tamen in multiplicationem facta per litteras omitti solet, et sola coniunctio litterarum sine signo multiplicationem significat. Sit $a=2$, $b=10$. erit $ab=2\times10=20$. Si eadem quantitas per se ipsam multiplicetur, apponitur post ipsam paullo supra numerus, qui exprimat, quoties scribenda esset. Ita $aa=a^2$, $aaa=a^3$. Numerus supra positus est *index* seu *exponens potentiae*, ut vocant, vel *potestatis* seu *dignitatis* quantitatis ipsius, et exprimit, *plures paucioresve vices, quibus quantitatis in se ipsam ducitur. Ita* $a\times a=a^2$, $a\times a\times a=a^3$. cet. *Quum quantitas solitaria est, tunc ha-*

bere intelligitur unitatem pro exponente. E. gr. $a = a^1$. *Ceterum probe notandum est discrimen, quod inter coëfficientem et exponentem intercedit. Exponens enim indicat iteratam quantitatis multiplicationem ; coëfficiens vero eiusdem iteratam summam. Ita* $a^3 = a \times a \times a$; *at vero* $3a = a + a + a$. Sit $a = 5$; etit $a^2 = 25$, $2a = 10$. Sit $b = 2$, erit $(a + b)^2 = \overline{a + b}^2 = 7 \times 7 = 49$; parenthesis autem ( ), vel lineola‾ *supra polynomium* producta designat, totam quantitatem $a + b$ in se ipsam multiplicari.

In quantitatum compositarum multiplicatione, altera quantitas alteri subscribenda est. Tum tota prima quantitas multiplicanda per unum ex terminis secundae, scribendo productum in eadem serie, deinde tota prima quantitas per aliam ; et ita porro scribendo singula producta in singulis seriebus, ac notando similes terminos diversorum huiusmodi productorum alios sub aliis, deinde omnium serierum colligenda summa. Omnium vero huiusmodi operationum patet ratio. Multiplicatio enim fit per partes non secus ac in quantitatibus simplicibus. Porro in multiplicatione quattuor operationis partes considerari debent, nempe signa, coëfficientes, litterae et exponentes. Hinc quattuor praescribuntur regulae. I.ª Si signa fuerint eadem, positiva scilicet vel negativa, productum fit positivum : contra autem si fuerint diversa, productum est negativum. Ita $+ \times + = +$; $+ \times - = -$; $- \times + = -$; & $- \times - = +$. II.ª Coëficientes in se invi-

cem multiplicantur. III.a Litterae ordine alphabetico scribuntur, nullo interposito signo. IV.a Si quantitas aliqua exponente adficiatur, eaque multiplicari debeat per eamdem litteram exponente itidem adfectam, littera illa semel in producto scribenda est; ita tamen ut huius quantitatis exponens aequalis fiat exponentium summae. Operatio tota patet exemplo. Quantitas multiplicanda superiori loco scribitur. Deinde multiplicatur per a, et producta singula infra lineolam scribuntur.

Exemplum.

$$\begin{array}{l} a^2+2ac-bc \\ \quad a-b \\ \hline a^3+2a^2c-abc \\ -a^2b-2abc+b^2c \\ \hline a^3-a^2b+2a^2c-3abc+b^2c \end{array}$$

Postea fit multiplicatio per $-b$, productaque infra apponuntur, et tandem productorum partes singulae, ut moris est, in snmmam colliguntur. Id vero pro maiori additionis facilitate observandum est, ut scilicet similes productorum partes aliae sub aliis scribantur, et sibi invicem respondeant, ut in additione prescripsimus. Quod spectat ad tres ultimas leges, hae satis patent ex antea demonstratis. Verum quod attinet ad signorum doctrinam, in bono lumine collocari debet.

Signorum multiplicatio, quae tironibus difficultatem adferre solet, ex ipsa quantitatum negativarum natura intelligi potest. Dum quantitas positiva $+a$ multiplicatur per aliquem numerum positivum $+n$, sensus est, quantitatem $+a$ toties sumi, quoties unitas continetur in n: atque proin-

de productum fit na. Si $-a$ multiplicari debeat per $+n$, sensus est, $-a$ quantitatem negativam toties sumi, quoties unitas continetur in n, ideoque productum est $-na$. Simili modo si multiplicetur $+a$ per $-n$, sensus est, quantitatem a toties subtrahi, quoties unitas continetur in n, ideoque productum est negativum, seu $-na$. Si $-a$ multiplicari oporteat per $-n$, sensus est, $-a$ toties subtrahendum esse, quoties unitas est in n, sed subtractio quantitatis negativae $-a$ aequivalet additoni $+a$, quare productum est $+na$. Nemo non videt, productum ex quantitate positiva in positivam, fieri positivum. Sed alii casus hoc modo rursus illustrari possunt. Quum sit $+a-a=0$, si multiplicetur $+a-a$ per n, productum debet esse 0. Iam vero primus producti terminus est $+na$, ergo terminus alter debet esse $-na$, qui destruat primum terminum $+na$, ita ut productum sit $+na-na=0$. Quare $-a\times+n=-na$. Simili modo si multiplicetur $+a$, et $-a$ per $-n$, primus producti terminus est $-na$, quare terminus alter est $+na$, alioqui termini duo sese mutuo non destruerent, quod tamen fieri debet, quum sit $a-a=0$. Ergo $-a\times-n=+na$.

PROBLEMA IV.

QVANTITATES LITTERALES DIVIDERE.

IV. Signum divisionis est lineola interposita,

dividendum ſeparans a diviſore, ita $\frac{a}{b}$ deſignat, a dividi per b. Diviſio etiam deſignatur, interpoſitis binis punctis, hoc modo $a : b$. Verum his ſignis utendum eſt dumtaxat, ſi diviſio accurate fieri non poſſit, quod primum illuſtrabimus exemplo quantitatum, quae unico conſtant termino. Si proponatur dividenda quantitas a^2bc per a^2c, erit $\frac{a^2bc}{a^2c} = b$; ac proinde quotus erit b Simili ratione $\frac{6a^2bc}{2a^2c} = 3b$. At $\frac{10a^2bc}{6a^2c} = \frac{10b}{6c}$.

In hoc ſita eſt tota diviſionis operatio, ut ex dividendo et diviſore expungantur litterae utrique communes: reliquae autem pro quoto habeantur. Si autem quantitates litterales coëfficientibus adficiantur, evidens eſt, diviſionem inſtitui debere non ſecus ac in arithmetica vulgari. Porro licet in dividendo et diviſore deleantur litterae communes, non tamen putandum eſt, quotum ex quantitate per ſe ipſam diviſa eſſe $= 0$, ita $\frac{abc}{abc}$ non eſt $= 0$. Delentur quidem litterae omnes, ſed quantitati litterali praefixus ſemper intelligitur coëfficiens 1, ſic $\frac{abc}{abc} = \frac{1\,abc}{1\,abc} = \frac{1}{1} = 1$. Et qui-

dem dum dividitur *abc* per *abc* quaeritur, quoties *abc* continetur in *abc*. Sed quantitas quaelibet semel in se ipsa continetur. Quare in hoc casu quotus est semper unitas. Quod ad signorum leges spectat, eaedem omnino sunt, quae pro multiplicatione: nempe si + dividatur per +, et — per —, quotus signo + adficitur, contra autem si dividatur + per —, vel — per +, quotus adficitur signo —. Tota explicatae operationis ratio evidens est ex ipsa divisionis natura. Quum enim productum ex divisore in quotum dividendo aequale esse debeat, manifestum est, quotum ex divisione quantitatis negativae per negativam oportere esse positivum. Ponamus enim, esse negativum; iam productum ex quoto negativo in divisorem negativum, foret positivum, ac proinde non rediret quantitas dividenda, quae ponitur negativa. Simili ratione demonstrantur aliae signorum leges.

Eodem plane modo operandum est in aliis divisionibus utcumque compositis. Ita si dividi oporteat $9ab^2 - 15a2b + 6a^3$ per $-3ab + 2a^2$. Singuli termini ita disponi debent, ut sumatur divisionis initium ab illo termino, qui *tam in dividendo quam in divisore* ad maximam evectus est potestatem, et ita per gradus progre-

Exemplum.

$$6a^3 - 15a^2b + 9ab^2 \quad | \; 2a^2 - 3ab$$
$$6a^3 - 9a^2b \qquad\qquad\qquad 3a^1 - 3b$$
$$* - 6a^2b + 9ab^2$$
$$- 6a^2b + 9ab^2$$
$$* \quad *$$

diendo, ut heic factum vides. Itaque dividas $6a^3$ per $2a^2$: prodit quotus $3a$; per quem divisor totus multiplicatur, productumque $6a^3-9a^2b$ subtrahas ex dividendo; residuum fit $-6a^2b$, cui addas $9ab^1$, et dividere pergas, ut antea: quotus est $-3b$; productumque ex hoc quoto et divisore, $-6a^2b+9ab^2$ iterum auferas ex dividendo, nihilque remanet. Quare accurata est divisio. Si autem peracta operatione aliquid supersit ita, ut divisor et reliqua pars dividendi nullas communes habeant quantitates, iam divisio accurate fieri non potest, sed quoto invento iungenda est fractio; de fractionibus autem tractabitur in proximo capite.

Saepe contingit, divisionem in infinitum continuari, et tunc quotus fit, ut vocant, *series infinita*. Exemplo sit unitas dividenda per $1-a$. Operatio est huiusmodi.

1	
$1-a$	$1-a$
$+a$	$1+a+a^2+a^3+a^4$ cet.
$+a-aa$	quotus es in infinitum.
$+aa$	
$+aa-aaa$	
$+aaa$ cet.	

Haec pauca exempla satis sint. Ceterum patet, multiplicationem et divisionem in quantitatibus litteralibus non secus ac in numeris sibi mu-

tuam probationem conferre ita, ut multiplicatio per divisionem, et versa vice divisio per multiplicationem confirmetur.

Scholion. In hoc capite frequens fit mentio de quantitatibus negativis, quarum genuinam notionem paucis iterum explicare non abs re erit. Si duae quantitates magnitudine aequales ad partes directe oppositas simul et in eodem subiecto coniunctae intelligantur; sese mutuo destruunt, illarumque effectus nihilo aequalis est. Ita si potentiae duae aequales in partes directe oppositas agunt, virium illarum effectus nullus est. Pari modo, si aliquis habeat 100 nummos, totidemque alteri debeat; iam illi 100 nummi, si ad huius hominis possessionem referantur, pro nihilo considerari debent. Si autem quis 100 nummos habeat, et 200 alteri debeat, iam possessio huius hominis negativa est, et, ut ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propositum locum iter facturus, ad partem directe oppositam progrediatur; iam huius hominis iter tamquam negativum et minus nihilo haberi debet, si ad finem propositum referatur. Igitur probe tenendum est, quid intelligatur per quantitatem negativam, et nihilo, ut dicunt, minorem. Quantitas negativa non minus realis est quam quantitas positiva; sed nihilo minor dicitur, quatenus positivae quantitati opponitur; iuncta scilicet quantitati positivae ipsam minuit, quem quidem effectum, hanc nempe diminutionem, ipsum *zero* non producit. Quare quantitas negativa ratione effectus tantum et *relative*; non autem *absolute* nihilo minor dici-

tur. Hunc loquendi modum a nonnullis usurpatum ita explicavimus, ut nihil difficultatis tironibus facessere possit.

CAPVT IV.

De iisdem operationibus in numeris fractis.

I.

Numeri fracti definitionem iam in primo capite tradidimus. Si divisor excedat dividendum, duo numeri a se invicem interposita lineola separantur ita, ut dividendus supra lineolam, et divisor infra eam scribantur, in hunc modum $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ cet. Similiter si quantitas aliqua litteralis per aliam dividenda proponatur, et divisio fieri non possit, eodem modo scribuntur duae quantitates: ita $\frac{a}{b}$ significat quotum ex *a* per *b*; tales autem quoti *fractiones* vocantur. Quantitas superior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium, in quas totum aliquod divisum fingitur; numerator autem designat, quot eiusdem partes accipiantur, vel, quod idem est, quoties una ex illis partibus sumatur; ac proinde pars illa considerari potest tamquam unitas aliqua. E. g. fractio $\frac{3}{4}$ nihil est aliud, quam pars quarta alicuius totius ter sumta; haec autem pars quarta, tamquam

unitas alia haberi etiam poteſt. *Itaque inſpecta numeratoris et denominatoris natura, evidens eſt: fractionem maiorem eſſe, quae ſub eodem denominatore maiorem habeat numeratorem; atque contra minorem eſſe, quae ſub eodem numeratore maiorem habeat denominatorem. Ac proinde valor fractionis conſiſtit in relatione ſeu ratione numeratoris ad denominatorem. Certum etiam eſt, quod ſi data quantitas alterius dupla ſit, tripla vel centupla, etiam illius dimidia, tertia, quarta, vel milleſima pars erit dupla, tripla, vel centupla huius dimidiae, tertiae, quartae, vel milleſimae partis. Ex quibus liquet, in fractionibus valorem non mutari, ſi numerator et denominator per eamdem quantitatem multiplicentur aut dividantur.*

II. Ex fractionum natura intelligitur, qua ratione numerus integer ad fractum reducatur, atque etiam ad denominatorem datum. Ita ſi numerus 3 reducendus proponatur ad fractionem, cuius denominator ſit 4; multiplicetur 3 per 4, ſcribaturque $\frac{12}{4}$, eritque haec fractio aequivalens ternario, ut patet; quum numerus 3 multiplicetur, ſimulque dividatur per 4. Sed tales fractiones, in quibus numerator maior eſt denominatore, pro veris fractionibus non habentur, atque *improprie* dumtaxat fractiones appellantur. Pari ratione ſi quantitas a reduci debeat in fractionem litteralem, cuius denominator ſit b; habebitur $\frac{ab}{b}=a$.

Ex his etiam patet, quomodo fractiones, quae diverſum habent denominatorem, ad eumdem

redigantur. Sint fractiones duae $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$: multiplicentur fractiones $\frac{a}{b}$ numerator et denominator per alterius denominatorem d, erit $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{a}{b}$. Simili modo multiplicentur fractionis $\frac{c}{d}$ numerator et denominator per alterius denominatorem b, erit $\frac{c \times b}{d \times b} = \frac{c}{d}$. (§. *I.*) Itaque generatim fractiones ad eumdem denominatorem reducuntur, multiplicando numeratorem unius per denominatorem alterius, et versa vice, scribendoque pro denominatore communi productum ex utroque denominatore. Evidens est, hanc operationem eamdem esse pro quolibet fractionum numero. Multiplicentur scilicet numeratores singuli seorsum sumti per denominatores ceterarum fractionum; producta singula dabunt numeratores singulos quaesitos. Deinde denominatores singuli in se ipsos ducantur, habebitur denominator communis quaesitus. Ita fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ reducuntur ad $\frac{acd}{bcd}$, $\frac{bbd}{bcd}$, $\frac{ccb}{bcd}$. Patet, rem perinde se habere in numeris quibuslibet fractis. Ita fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, *respective* aequales sunt fractionibus $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$ (§. *I.*).

III. Hinc facile adduntur et subtrahuntur fractiones. Reducantur scilicet ad denominatorem communem (§. *II.*); sumatur numeratorum summa vel differentia, et subscribatur denominator communis. In primo casu habebitur additio; in altero autem subtractio. Ita $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} = \frac{ade + bce + bdd}{bde}$, et $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$. Similiter in numeris $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$. Sed $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}$. Fractiones ex integris et fractis compositae, qualis est $1\frac{5}{12}$, appellantur mixtae. Ex his autem statim intelligitur, quomodo numeri integri et fracti simul addi possint, vel a se invicem subtrahi. Integri ad fractos reducantur et ad denominatorem communem, atque operatio fiat, ut antea. Quamvis autem additionis et subtractionis operationes ex dictis sint manifestae, demonstrari tamen possunt hoc modo. Sint fractiones duae $\frac{a}{b}$. $\frac{c}{b}$ ad eumdem denominatorem reductae, erit: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$. Etenim

ponatur $\frac{a}{b} = m$, et $\frac{c}{b} = n$; erit, facta multiplicatione per b, $a = mb$, $c = nb$, et $mb + nb = a + c$; ac proinde $m + n = \frac{a+c}{b}$, hoc est, $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$. Simili modo patet, esse $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = m - n = \frac{a-c}{b}$.

IV. Nulla reductione opus est; ubi fractiones multiplicare et dividire oportet. In multiplicatione satis est numeratores et denominatores invicem ducere: habebitur numerator et denominator fractionis quaesitae, quae erit productum ex datis fractionibus emergens. Contra vero si fractio per aliam fractionem dividenda sit, numerator dividendae per alterius denominatorem est multiplicandus, et illius denominator in huius numeratorem ducendus est, *seu quod idem est: fractio, per quam divisio fieri debet, invertatur* e. g. *pro* $\frac{2}{3}$ *scribatur* $\frac{3}{2}$. *Atque fiat fractionum multiplicatio, ut in casu praecedenti.* Ita productum ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Quotus autem ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Etenim ponatur $\frac{a}{b} = m$; $\frac{c}{d} = n$; erit $a = bm$,

et $c = dn$. Iam demonſtrandum ſupereſt, eſſe $\frac{ac}{bd} = mn$, et $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$. Quod quidem facile patet ſubſtituendo loco a et c illorum valores bm et dn; erit in primo caſu $\frac{bdmn}{bd} = mn$; in caſu autem altero, fiet $\frac{bdm}{bdn} = \frac{m}{n}$. Demonſtratio generalis eſt, ac proinde in quibuslibet numeris fractis eadem eſt operatio. Sic productum ex $\frac{2}{6}$ in $\frac{4}{8} = \frac{8}{48}$. Sic quotus ex $\frac{3}{6}$ per $\frac{2}{16} = \frac{48}{12} = 4$. Manifeſta quoque eſt operandi ratio, ſi numerus fractus per integrum multiplicari aut dividi debeat. Conſiderari enim debet numerus integer tamquam fractio impropria, in qua denominator eſt unitas, et reliqua peragenda, ut antea. Quare patet, in multiplicatione numerum integrum per numeratorem eſſe multiplicandum; contra autem in diviſione per denominatorem. Nec mirum eſſe debet, ſi fractio per fractionem diviſa, praebeat numerum integrum; quum revera una fractio bis, ter, quater cet. in alia contineri poſſit. Itaque fractionum valor per multiplicationem minuitur, augetur per diviſionem. Quod quidem paradoxum videtur iis, qui multiplicationis et diviſionis naturam non ſatis attendunt.

Ex dictis etiam facile patet, *fractiones fra-*

ctionum ad multiplicationem referri. *Fractionem fractionis* appellant fractionis alicuius partem. Ita si sumantur $\frac{2}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, operatio illa ad divisionem non pertinet, sed ad multiplicationem. Etenim si sumenda proponeretur dumtaxat pars $\frac{1}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, multiplicandus esset denominator per 3, habereturque $\frac{1}{12}$. At sumi non debet dumtaxat pars tertia, sed duae tertiae partes sumendae proponuntur. Quare productum praecedens duplo maius fieri debet, hoc est, numerator multiplicandus est per 2. Eodem modo reduci debent aliae quotlibet fractiones fractionum, multiplicando numeratores singulos et singulos denominatores.

Ex fractionum doctrina colligi possunt operationum arithmeticarum compendia plurima, si de quantitatibus variae speciei agatur. E. g. quaeritur, quanti constiterint 35 mensurae mercis alicuius, si mensurae unius pretium sit 24 nummorum et assium 15. Multiplicetur primo (35×24) erit productum 840. Quod ad alteram multiplicationis partem, considerari potest, esse $15 = 10 + 5$. Iam si asses 10 nummo aequivalerent, productum foret 35. At sunt 10 *asses* pars decima dumtaxat nummi unius, quare 35 dividi debet per 10 *. Simili modo operandum est in ulti-

* *Monetae, de quibus heic Auctor, videntur, quae hodie num apud romanos in usu sunt.* As *est vilioris pretii moneta* quattrino, *quo-*

ma multiplicationis parte, atque emerget productum ex nummis, nummorumque partibus compositum. Ille operandi modus dicitur operatio per partes *aliquotas*. Partes enim aliquotae quantitatis alicuius appellantur, quae ipsam quantitatem accurate dividunt; secus autem partes *aliquantae* vocantur. Ceterum exercitatio atque attentio multa docebunt, quae fusius explicare superfluum esset.

V. Explicatis arithmeticae operationibus in numeris fractis, iam superest, ut communes, si quos habeant, fractionum divisores inquiramus. Si numeri nullum habeant communem divisorem praeter unitatem, numeri illi inter se *primi* dicuntur, cuiusmodi sunt 1, 5, 7, 11, 19, quos sola unitas metitur. At numeri *compositi* appellantur, quos praeter unitatem alii quoque numeri metiuntur. Sic 12 componitur ex 2 in 6, itemque ex 3 in 4. Quare 2, 3, 4, 6 metiuntur 12, seu aliquoties sumti 12 adaequant. Illi autem numeri dicuntur *factores* ipsius numeri 12. Si igitur fractionis alicuius denominator sit numerus compositus, et resolvi possit in alterius fractionis denominatorem, instituta divisione per hunc numerum, qui sit vel numerator vel etiam numeratoris divisor communis; iam licebit fractionem

rum quinque componunt aliam bayocco. *Ex quinque* bayocchi *conflatur alia* grosso. *Quattuor* grossi *componunt aliam, quae dicitur* pappetto, *quae nomine nummi ab Auctore intelligitur. Quapropter in hac computatione nummus seu* pappeto *componitur ex* 100 *assibus seu* quattrini.

hanc ad minimos terminos deprimere; quod sic praestari potest. Dividatur maior numerus per minorem; si nihil ex divisione supersit, iam minor numerus est divisor maximus communis. Si autem residuum aliquod fuerit, divisor datus per hoc residuum dividatur. Si divisio accurate fiat, primum residuum erit maximus divisor communis. Si autem divisio non sit accurata, sed alterum maneat residuum, per hoc secundum residuum dividatur primum. Si autem nullum supersit tertium residuum, iam residuum secundum pro maximo divisore communi haberi debet. Atque ita progrediendum, donec nihil supersit. Atque ultimus divisor erit maxima, ut vocant, communis duorum numerorum mensura, qua inventa, fractio ex his duobus numeris composita ad minimos terminos reducitur. Exemplo sit fractio $\frac{91}{294}$. Dividatur 294 per 91, neglectoque quoto 3, residuum est 21. Rursus dividatur 91 per 21, iterumque neglecto quoto 4, residuum est 7. Tandem residuum primum 21 per alterum 7 dividatur; habetur quotus 3, et divisio est accurata. Quare numerus 7 est maximus communis divisor, per quem divisis numeratore et denominatore, fractio praecedens in hanc simpliciorem abit $\frac{13}{42} = \frac{91}{294}$ AEquales autem esse fractiones ilias, ex natura divisionis, *et ex his, quae* §. *I. dicta sunt*, omnino patet. At, si divisione instituta, ad unitatem tandem, ultimum residuum, perveniatur; iam nulla est mensura communis praeter unitatem.

Eadem plane est operatio in quantitatibus lit-

teralibus. Hoc solum observandum est, nempe: quantitates residuas per earum simplices divisores esse dividendas, *seu quod idem est, per monomium aliquod, si forte omnibus residui terminis commune sit*. Quantitates item secundum eiusdem litterae dignitatem, *sicut in dividendo*, semper sunt ordinandae. Invenienda sit maxima communis mensura quantitatis a^2-b^2, et $a^2+2ab+b^2$. Dividatur $a^2+2ab+b^2$ per $a-b^2$; residuum fit $2ab+2b^2$. *Quum vero in hoc residuo sit monomium* 2b *utrique termino commune; deleatur utrinque*, ut reducatur residuum ad $a+b$. Iterum dividatur a^2-b^2 per $a+b$; divisio accurate succedit, ac proinde maximus divisor communis est $a+b$.

Tota huius operationis ratio patet ex hoc divisionis principio: si nempe quantitas aliqua metiatur et divisorem et residuum, metiri quoque debet ipsum dividendum. Est enim dividendus aequalis producto ex divisore in quotum et ipsi residuo simul. Ita in exemplo praecedenti *sit dividendus* $a^2+2ab+b^2=A$: *divisor* $a^2-b^2=B$: *residuum* $2ab+2b=R$. *Si quotus certo quodam et integro numero exprimatur*, v. g. 4, *erit* $A=4B+R$, *seu* $A-R=4B$. *Si igitur* B *et* R *habeant communem divisorem*; *erit* R *aliquoties sumtus*, v. g. *ter*, *aequalis* B, *adeoque* $B=3R$. *Inde substituto valore* B *in superiori aequatione*, *erit* $A-R=12R$, *seu* $A=13R$. *Igitur* A *et* R *habent etiam communem divisorem*, *quum sit* A *multiplus ipsius* R.

Porro ubi residuum fit nullum, seu dum accurate succedit divisio; evidens est, divisorem haberi maximum. Quum enim dividendus aequa-

lis sit producto ex divisore in quotum, et ipsi residuo simul; ubi residuum fit divisor accuratus, iam patet, divisorem esse maximum. Nulla enim quantitas potest habere divisorem se ipsa maiorem. Ita in praecedenti aequatione $A = QB + R$, exprimat Q quotum. Iam dividatur B per R; et divisio succedat accurate, patet, esse R maximum divisorem communem. Dividit enim B (*ex hypoth.*) ac proinde et BQ: praeterea dividit R; fieri autem non potest, ut R habeat divisorem se ipso maiorem. Quamvis in numeris et quantitatibus litteralibus eadem sit operatio; tamen ut divisor per residuum possit dividi, saepe oportet, primos terminos ita praeparare, ut alter per alterum accurate dividi possit sine fractione. Id autem fit observando in novi divisoris primo termino quantitates, quae non habentur in primo termino dividendi. Si autem per eas dividi potest totus divisor, is totus dividatur; sin minus, multiplicetur totus dividendus per illas quantitates, quae non occurrunt in dividendo, atque ita faciendum in tota operationis serie, si necesse sit. Ita in praecedenti exemplo ubi perventum est ad residuum $2ab + 2b^2$, residuum illud dividi praescripsimus per $2b$. Haec autem praescripta praeparatio tota pendet ex hoc principio: nempe, quantitates A et B communem retinebunt maximum divisorem, si multiplicetur vel dividatur quantitas altera, puta A, per quantitatem, quae nullum cum quantitate B communem divisorem habeat. Illud autem principium ex ipsa divisoris communis notione est omnino evidens.

De fractionum communi divisore unum addendum est, quod deinde utilitatis maximae esse debet. Si numeri duo primi fuerint, aut eorum alteruter dumtaxat primus fuerit; evidens est ex ipsa numerorum primorum definitione et ex communium divisorum regula, numeros illos nullum praeter unitatem divisorem communem habere. Quare fractio ex duobus numeris primis composita, puta $\frac{a}{b}$, ad simpliciores terminos reduci non potest. Ergo productum ac ex duobus numeris primis ab ipso b diversis non potest accurate dividi per b. Nam ponatur $\frac{ac}{b} = m$ erit $\frac{a}{b} = \frac{m}{c}$, quod fieri non potest. Oporteret enim b et c habere divisorem communem, quod est contra hypothesim. Similiter ostendetur, fractionem $\frac{ac}{bd}$, in qua d est numerus primus ad simpliciorem expressionem reduci non posse, atque ita deinceps. Nempe generatim productum ex numeris primis quibuscumque, divisum per productum ex aliis quibuscumque numeris itidem primis, ad simpliciores terminos reduci non potest. Quare si $\frac{a}{b}$ sit fractio ad minimos terminos reducta erunt quoque $\frac{aa}{bb}$, $\frac{a^3}{b^3}$, et generatim $\frac{a^n}{b^n}$ fractiones ad simplicissimos terminos redactae. Ac proinde fractio quaelibet sive pura sive mixta ad

potentiam quamlibet evecta semper manet fractio.

De fractionibvs decimalibvs.

Scholion. Praeter fractiones in hoc capite explicatas conſiderari etiam debent fractiones, quae *decimales* appellantur. Illae ſcilicet fractiones pro denominatore habent unitatem cum tot ſequentibus cyphris, quot ſunt numeri in numeratore: atque eam ob cauſam non ſcribitur denominator, ſed numerator dumtaxat, cuius numeris praefixa eſt virgula. Alii punctum praefigunt, quod fit, ut numerator a numeris integris diſtinguatur. Ita ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{10}$, ſcribit ſolet 19, 4. Ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{100}$, ſcribitur 19, 04; cyphra numero 4 praefixa indicat, denominatorem eſſe 100. Fractio $19\frac{4}{1000}$ ita exprimitur 19,004. Ex fractionum decimalium ſignificatione patet, primum numerum poſt virgulam deſignare decadas, ſecundum centenarios, et ita deinceps per decadas ſemper progrediendo. Sic $4,217 = 4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$. Fractionum decimalium utilitas maxima eſt ad obtinendum quotum proxime verum, ſi diviſio accurate fieri non poſſit. E. g. ſi dividendus proponatur numerus 147475 per 362, quotus invenitur 407 cum reſiduo 141, cui addatur 0, dividaturque 1410 per 362, quotus erit 3 cum novo reſiduo 324, cui iterum addatur 0, dividaturque

3240 per 362, quotus prodit 8 cum residuo 344, cui addatur o; in nova tandem divisione quotus emergit 9; quod autem remanet 182, iterum dividi posset; sed operationis ordinem exhibuisse satis sit. Quare quotus est 407, 389, quem quidem accuratiorem esse, evidens est.

Eadem methodo fractio vulgaris in fractionem decimalem reducitur. Si fractio $\frac{3}{4}$ in fractionem decimalem reducenda proponatur, numeratori 3 addatur o, dividaturque 30 per 4, quotus est 7 cum residuo 2, cui addatur o, rursusque 20 per 4 dividatur, quotus est 5 sine ullo residuo; quare $\frac{3}{4} = 0, 75$. Et re quidem ipsa, quum sit 25 quarta pars numeri 100, numerus 75 erit $\frac{3}{4}$ eiusdem numeri 100. Hinc generatim patet, quo artificio fractio vulgaris ad decimalem reduci possit. Multiplicetur nempe numerator fractionis datae per 100 vel 1000 cet. productum illud divisum per denominatorem erit numerator fractionis decimalis, cuius denominator est 100 vel 1000 cet. Saepe tamen contingit, fractiones ad decimales accurate reduci non posse, etiamsi divisionum residuis plures utcumque cyphrae addantur. Id autem facile dignoscitur, si nempe ad idem residuum semper perveniamus, vel si iidem numeri eodem ordine redeant. Ita si fractionem $\frac{4}{7}$ ad decimalem reducere volueris, invenies 0, 571428571428571428 cet. nec umquam pervenies ad divisionem accuratam. Pari

modo ad reducendam fractionem $\frac{5}{12}$ in decimalem, invenies o, 416666 cet. In his autem casibus duas vel tres primas decimales adhibere satis sit, reliquae autem negliguntur. Ita poni possunt $\frac{4}{7} = 0, 57$, et $\frac{5}{12} = 0, 416$.

Haec quidem pauca satis esse possunt iis, qui demonstrationis severitatem non quaerunt. Sed rem utilissimam generatim et omnino accurate ostendemus. Sit $\frac{p}{q}$ fractio vulgaris reducenda ad ſractionem decimalem $\frac{r}{10^n}$ in qua n exprimit cyphrarum numerum, et r valorem notarum in numeratore, erit $r = \frac{q\times 10^n}{q}$ Sed est $10^n = 2^n \times 5^n$; est igitur $r = \frac{p\times 2^n \times 10^n}{q}$. Non potest autem $\frac{p\times 2^n \times 5^n}{q}$ seu r abire in numerum integrum, nisi q aequalis sit alicui potestati ipsius 2 vel 5 vel 2×5, vel tandem producto ex aliqua potestate ipsius 2 in aliquam potestatem ipsius 5, quae tamen potestates sunt minores, quam n. Ponitur enim, fractionem $\frac{p}{q}$ esse ad minimos terminos reductam, hoc est, p et q nullum habere divisorem communem. In alio quolibet casu

fractio $\frac{p\times 10^n}{q}$ seu r numquam fieri poterit numerus integer. Attamen quo maior erit n, hoc est, quo plures erunt cyphrae in denominatore, eo magis fractio $\frac{r}{10^n}$ accedet ad fractionem $\frac{p}{q}$. Si enim $p\times 10_n$ per q dividatur, inventus r minor erit (*quum sit quotus in divisione non exacta*). Iusto autem maior fiet, si unitate augeatur. Quare $\frac{r}{10^n}$ minor est, quam $\frac{p}{q}$, et $\frac{r+1}{10^n}$ maior. *Porro quum augetur* n, *maiori ratione crescit* r; *adeoque crescit valor fractionis* $\frac{r}{10^n}$ *Item aucta* r *minuitur in numeratore fractionis* $\frac{r+1}{10^n}$ *ratio unitatis ad* r, *adeoque minuitur excessus iusto maior. Igitur quo maior fuerit* n, *eo magis fractio decimalis ad legitimum valorem accedet.* Hinc patet, utilissimum esse fractionum decimalium usum, quum earum ope valor fractionum accuratus quamproxime haberi possit.

Quattuor arithmeticae operationes in fractionibus decimalibus eadem omnino ratione, qua in numeris integris tractantur, sed habenda est maxime ratio virgulae, qua fractiones ab integris dirimuntur. Haec virgula in eadem linea verticali iacere debet,

si plures quantitates vel in unam summam colligendae sunt, vel invicem subtrahendae. Si vero multiplicatio instituitur, eum locum in producto occupare debet virgula, ut totidem post se notas relinquat, quot erant in utraque fractione. Tandem si divisio peragitur, numeri dividendi notae decimales probe observandae sunt; nam in quoto et divisore simul totidem esse debent post virgulam notae, quot erant in dividendo. Quattuor illarum operationum exempla exhibemus.

Additio.

23, 304
3, 9567
149, 86
―――――
177, 1207

Subtractio.

49, 638
17, 16
―――――
32, 478

Multiplicatio.

12, 35
4, 2
―――――
2470
4940
―――――
5 1,870

Divisio.

8, 445 | 3, 22
6 44   2, 6
―――――
2 005
1 932
―――――
0 073

Vnum autem in divisione notandum est. Si nempe in divisore plures occurrant notae decimales, quam in dividendo, tunc decimalibus dividendi adiunges, quot volueris cyphras; ita tamen ut notae decimales in dividendo plures sint, quam in divisore, ut nempe in quoto aliquae decima-

les notae haberi possint. Tota operationum illarum ratio statim manifesta fiet, si fractiones decimales vulgari modo exprimantur. Ita in exemplo divisionis praecedentis 8, 445 = $\frac{8445}{1000}$ et 3, 22 = $\frac{322}{100}$. Itaque dividi debet fractio prior per secundam. Evidens autem est, cyphram unam dumtaxat in quoto adesse. Et hinc facile intelligitur, cyphrarum numerum in quoto esse semper aequalem differentiae cyphrarum in divisore et dividendo. Generatim, quod ad multiplicationem spectat, si 10^n sit denominator fractionis unius decimalis, et $10m$ alterius, denominator producti erit 10^{m+n}. Quare, omisso denominatore, productum habere debet tot partes decimales seu numeros post virgulam, quot sunt unitates in $m+n$. Contraria ratione in divisione denominator quoti non erit 10^{m+n}, sed 10^{m-n} *exprimente* m *partes decimales in dividendo*, *et* n *partes decimales divisoris*; ideoque $m-n$ exprimet numerum cyphrarum, quae post virgulam in quoto scribi debent.

CAPVT V.

De radicum extractione.

I.

Explicavimus iam in capite II, quid sit *potestatum* formatio. Quantitatis alicuius *potestas pri-*

ma vel *primi gradus* est quantitas ipsa solitarie spectata. Ita prima potestas ipsius a est a. Productum ex quantitate aliqua in se ipsam dicitur *potestas secunda* vel etiam *quadratum*, ita a^2 est quadratum. Ipsa autem quantitas dicitur *radix*, quae vocatur *quadrata*, si potestas sit secunda, vel quadratum. Si quadratum in ipsam quantitatem ducatur, productum dicitur *potestas tertia* vel *cubus* : ita a^3 est cubus ipsius a : quantitas autem dicitur *radix cubica*. Et generatim *quantitas ad datam potestatem elevatur, si eius exponens ducatur in exponentem potestatis. Ita* si quantitas a evehatur ad potestatem, cuius index est n, habebitur a^n gradus n.

Scholion 1. In hoc autem capite praesertim considerabimus radicum quadratae et cubicae extractionem. Quod ut clare fiat, ipsam quadrati et cubi formationem primum investigabimus, atque deinde ad operationes arithmeticas recto ordine progrediemur. Sit quantitas litteralis $a+b$ ad quadratum evehenda, prodit $aa+2ab+bb$. Iam vero quadrati huius formationem seu partes singulas expendamus. Quadratum binomii $a+b$ continet : 1.° Quadratum aa primae partis a : II.° Productum $2ab$ ex duplo primae partis in secundam : III.° Quadratum partis secundae, nempe bb. Simili modo si multiplicetur $+ a b + c$ per $a + b + c$, orietur quadratum $a^2 + 2ab + b^2 + \overline{2a + 2b} \times c + c^2$. In hoc quadrato rursus considerandae sunt partes singulae. Continet 1.° quadratum $a^2 + 2ab + b^2$ ex duobus primis terminis $a + b$: II.° Productum ex duplo duorum

priorum terminorum in tertium terminum $= \overline{2a+2b} \times c$. Tandem continet quadratum c^2 tertii termini. Simili modo progredi licet pro alia qualibet quantitate ex pluribus quam tribus terminis composita. Tales vero quantitates magis compositae appellari solent *polynomia*.

Eadem omnino ratione intelligitur cubi formatio. Binomium $a+b$ ad tertiam potestatem evehatur: multiplicetur nempe quadratum $a^2+2ab+b^2$ per $a+b$, prodit cubus $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Cubi huius partes singulae sunt. I.° Cubus primi termini, nempe a^3. II.° Productum ex triplo quadrato $3a^2$ primi termini in terminum secundum, scilicet $3a^2b$. III.° Productum ex primo termino a in triplum quadratum secundi termini, nempe $3ab^2$. IV.° Cubus secundi termini, scilicet b^3.

Simili modo operandum est pro trinomio $a+b+c$; invenieturque cubus $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3ac^2+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$. In hoc autem cubo praeter cubum $a^3+3ab^2+3a^2b+b^3$ duorum primorum terminorum, habetur I°. Factum ex triplo quadrato summae duorum primorum terminorum in tertium terminum c, nempe $3a^2c+6abc+3b^2c = \overline{a^2+2ab+bb} \times 3 \times c$. II°. Summa duorum primorum terminorum per tertii termini triplum quadratum multiplicata, scilicet $3ac^2+3bc^2 = \overline{a+b} \times 3c^2$. III°. Tandem tertii termini cubus, nempe ccc.

II. Ex potestatum compositione facile colligitur illorum resolutio sive radicum extractio. Sit

quantitas litteralis $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$ ex qua extrahenda sit radix quadrata. Sumatur primi termini radix x, cuius quadrato subtracto, remanent termini duo $-ax + \frac{1}{4}a^2$. Deinde sumatur duplum ipsius x, per quod dividitur secundus terminus $-ax$, quotus fit $-\frac{1}{2}a$, qui multiplicetur per $2x$. Tandem fiat quadratum quoti $-\frac{1}{2}a$, atque producta illa ex residuo $-ax + \frac{1}{4}a^2$ subtrahantur, nihil remanet. Quare radix quadrata est $x - \frac{1}{2}a$. Tota operatio patet ex numero praecedenti. En typus calculi.

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 \quad (x - \frac{1}{2}a \\
 & x^2 \\
 & - \\
 & 0 - ax + \frac{1}{4}a^2 \\
 & \quad 2x - \frac{1}{2}a \\
 & \hline
 & \quad - ax + \frac{1}{4}a^2 \\
 & \hline
 & \quad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Ceterum, si radix plures habuerit quam duos terminos, iam duo primi termini post primam operationem velut unicus terminus considerari debent, et reliqua peragenda, ut antea, quod quidem patet ex demonstratis.

Proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate litterali $c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3$. Ex primo termino extrahatur radix cubica, quae est c, cuius c^3 ex primo termino auferatur: remanent termini $-3c^2y + 3cy^2 - y^3$. Iam quia notum est, secundum terminum multiplicari per triplum quadratum primi, sumatur termini c triplum quadratum, per quod dividatur secundus terminus $-3c^2y$, prodit quotus

$-y$, qui erit secunda pars radicis. Tum divisor $3c^2$ ducatur in $-y$, ut habeatur triplum quadratum primae partis radicis ductum in secundam $-3c^2y$. Deinde fiat $3y^2 \times c$ aequale triplo quadrato secundae partis radicis ducto in primam. Tandem fiat $-y^3$: cubus secundae partis. Si haec producta ex reliquis terminis auferantur, nihil remanet; ac proinde radix accurata est $c-y$. En calculi typum.

$$
\begin{array}{l}
c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3 \quad (c-y \\
c^3 \\
\hline
0 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3 \\
\quad (3c^2) \\
\quad -3c^2y + 3cy^2 - y^3 \\
\hline
\quad\quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

III. Ex demonstrationibus praecedentibus facile patet radicum extractio in quantitatibus numericis. Extrahenda sit radix quadrata, ut in praesenti exemplo. Numerum datum in classes divide, quarum singulae duas notas contineant, initio a dextris facto. Nihil autem refert sive unica tantum nota constet prima classis, sive notis duabus. Quaere radicem veram aut proxime veram numeri 38, in nostro casu est 6. Scribe 6 loco radicis, et eius quadratum 36 aufer ex

Exemplum.

$$
\begin{array}{r}
38.94.89. \quad (624{,}09. \\
36 \\
\hline
294 \\
122 \\
244 \\
\hline
5089 \\
1244 \\
4976 \\
\hline
11300 \\
12480 \\
0 \\
\hline
1130000 \\
124809 \\
1123281 \\
\hline
6719 \quad \text{cet.}
\end{array}
$$

38. Residuo 2 adiunge notas classis proxime sequentis 94, et huius novi numeri postrema nota neglecta, quaere, quoties duplum radicis hactenus inventae sive 12 contineatur in 29, invenietur 2; scribe ergo 2 in radice, eumdemque quotum 2 scribe etiam sub dexteriori nota 4 numeri 294. Ex 294 aufer productum ex 2 in 122 nempe 244, remanet 50. Huic autem residuo adnecte notas classis proxime sequentis 89. Rursus contemta novi numeri dextera nota, quaere, quoties duplum radicis hactenus inventae, scilicet 124, contineatur in 508. Quotus erit 4, qui quidem ponatur etiam sub nota dextera numeri 5089, iterumque ex numero superiori aufer productum ex 1244 in 4, nempe 4976, residuum est 113. Quare radix proxime vera numeri propositi est 624. Numerus autem ille foret perfecte quadratus, si numero 113 minueretur. Quamvis autem radix quadrata non sit accurate vera, ad eam tamen fractionum decimalium ope pro arbitrio licet accedere. Residuo 113 addantur cyphrae duae, ut heic factum vides, ut habeatur numerus 624 tamquam prima pars radicis, cuius duplum sumatur, nempe 1248; dividaturque 1130, per 1248 quotus est 0, quare scribe 0 in radice, et multiplica 12480 per 0, productumque 0 aufer ex 11300, remanent 11300. Huic residuo iterum addantur cyphrae duae, sumaturque duplum radicis, nempe 12480, per quod dividatur 113000, scribaturque quotus 9 in radice, qui scribatur etiam sub dextera cyphra numeri 1130000, et per quem multiplicetur numerus 124809, productumque 1123281 auferatur ex 1130000, residuum fit 6719. Operatio rursus con-

tinuari posset. Sed satis patet methodus, cuius ope radicem proxime veram obtinere licet, et ad eam magis ac magis accedere. Tota operationis ratio manifesta est ex fractionum decimalium natura.

Scholion II. In huius operationis serie idem notare oportet, quod in divisione observatum est, nempe, si post adiectas alicui residuo notas duas classis proxime sequentis, duplum radicis inventae non contineatur in numero, qui per illud duplum dividendus est, postrema huius dividendi nota neglecta; cyphra scribenda est in radice, et classis proximae notis duabus demissis, operatio continuanda. Evidens autem est, hanc operationem esse divisioni simillimam, in qua radix sit quotûs, divisor vero sit duplum radicis postremo inventae auctum nota, quae deinceps investigatur. Hoc unum interest, quod in divisione divisor semper est idem, heïc autem semper augetur: in divisione totus divisor cognoscitur, heic autem ignota est novi divisoris nota, quae inquiritur. Atque id in causa est, cur in hac divisione instituenda postrema dividendae quantitatis nota praetereatur. Si contingeret, divisorem esse maiorem: v. g. in praesenti exemplo, si productum ex 2 in 122 subtrahi non posset ex 294, iam in radice scribendus esset numerus proxime minor, et tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro id minime contingit; quare nulla correctione opus est. Vnum tandem superest notandum, cur nempe post duplum radicis inventae scribatur radix nova, et deinde numerus totus per radicem novam multiplicetur. Ita in praesenti exemplo post duplum primae radicis 12 scribitur 2, totusque numerus 122 mul-

tiplicatur per novam radicem 2. Operationis ratio manifesta est. Quum enim numerus 2 in radice duas exprimat decadas, huius numeri quadratum versus sinistram promoveri debet, ut patet ex notarum arithmeticarum significatione.

Ad radicis cubicae extractionem iam veniendum est. Pro radice cubica methodus est admodum similis, et iisdem innititur principiis. Extrahenda sit radix cubica, ut in praesenti exemplo. Diviso numero in classes per ternas notas, incipiendo a dexteris notis, prima classis, quae poterat continere vel tres notas vel duas, in hoc casu unicam continet. Quaeratur radix cubica numeri 5 proxime minor, quae est 1. Huius cubus 1 subtrahitur a prima classe 5, residuum est 4, cui adnectatur classis sequens, ut heic factum vides. Deinde ita dicendum, prima pars radicis 1 pro decade haberi debet, si conferatur cum secunda parte. Sumatur itaque numeri 10 quadratum 100, et per illius tri-

Exempl.

```
5.305.472.  (174,4
1
-----------
4305
(300)
-----------
2100
1470
 343
-----------
3913
-----------
 392472
 (86700)
-----------
 346800
   8160
     64
-----------
 355024
-----------
 37448000.
```

plum 300 dividatur 4305, invenietur quotus 7; quilibet enim alius foret iusto maior, si 7 excederet, ut patet operationem experiendo. Iam multiplicetur 300 per 7, habetur productum 2100, *quod est triplum quadratum primae partis 10 ductum in secundam 7*. Dic praeterea $7\times 7 = 49$, et $49\times 10 = 490$, postea $490\times 3 = 1470$, *quod est triplum quadratum secundae partis radicis 7 ductum in primum 10*, et illud scribe infra 2100. Tandem $7\times 7\times 7 = 343$, *quod est cubus secundae partis radicis* 7, et scribi debet infra 1470. Addantur numeri 2100, 1470 et 343; et summa 3913 auferatur ex numero 4305; residuum est 392. Demittatur classis tertia 472, et duae primae partes radicis, velut pars una considerentur. Haec autem pars, quae est 17, aequivalet 170, si conferatur cum tertia parte quaesita. Sumatur huius numeri 170 triplum quadratum 86700, per quod dividatur pars cubi reliqua 392472, prodit quotus 4, quem scribe in radice. Multiplicetur divisor 86700 per 4, productum fit 346800, *quod est quadratum triplum primae partis radicis* 170 *ductum in secundam partem* 4, et infra scribitur. Dicas deinde $4\times 4 = 16$; $16\times 170\times 3 = 8160$, quod productum, *quum sit triplum quadratum secundae partis radicis* 4, *ductum in primam partem* 170, scribe infra 346800, atque infra scribi debet cubus ipsius 4, nempe 64. Addantur tres illae quantitates; quarum summa 355024 ex reliqua cubi parte subtrahatur, residuum fit 37548. Quare numerus propositus non est cubus perfectus; sed ad radicem proxime veram licebit accedere, si

residuo addantur tres cyphrae, ut in praesenti exemplo factum est; et si eadem operatio deinde pro alio quolibet fractionum decimalium numero iteretur, magis ac magis accurata fiet radix inventa. Illud autem observandum est diligenter, inventas radicis partes velut partem unicam tractandas esse, si pars alia investigari debeat.

In extractione radicis quadratae et cubicae, diximus, tot esse radicis partes, quot sunt diversae numeri propositi partes. Id vero demonstratione indiget. Quantitas quaelibet ex duobus constans numeris unicam dumtaxat in radice partem habere potest. Consideretur numerus 99 omnium, qui duabus constent notis, maximus. Deinde radicem ex duabus notis compositam omnium minimam 10 consideremus: quadratum erit 100, quod numero 99 maius est, ac proinde radix duas notas continere non potest. Similiter quantitas omnium minima, quae tres habeat notas, est 100, cuius radix quadrata est 10, quae proinde duas continet notas. Ac quantitas omnium maxima, quae tres habeat notas, est 999, cuius radix tres notas habere non potest. Nam numerus omnium minimus tribus constans notis est 100, cuius quadratum fit 10000, quod quidem numerum 999 longe excedit. Eadem ratione ad aliam quamlibet numerorum seriem progrediendo, facile intelligitur praescripta numerorum divisio in extrahenda radice quadrata. Et huic numerorum divisioni partium numerum in radice respondere, evidens est. Idem simili ratiocinatione constat pro radice cubica. Evidens

est, extractionem radicum simili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo scilicet radicem propositam ex numeratore et ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione operationis rite peractae facile habetur argumentum. Si radix sit quadrata, haec in se ipsam ducatur, productoque addatur residuum, si aliquod fuerit facta operatione, et restitui debet ipse numerus propositus. Similiter radix cubica ad cubum evehatur. Id vero statim patet ex ipsa earumdem operationum natura.

De quantitatibus surdis sive irrationalibus, et incommensurabilibus.

IV. Saepe ab extrahenda radice supersedemus ubi veram invenire non licet, et quantitati propositae praefigitur signum $\sqrt{}$ quod *radicale* appellant. Sic $\sqrt{3}$ significat radicem quadratam numeri 3. $\sqrt[3]{10}$ denotat radicem cubicam denarii. Et hi sunt numeri, quos arithmetici vocant numeros *surdos* sive *irrationales*, aut etiam *incommensurabiles* *. Quantitatibus litteralibus idem signum praefigitur. ita $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$ significant radicem quadratam ipsius ab, et radicem cubicam quantitatis abc. Sed commoditatis ergo radix secunda vel quadrata exprimi solet per $\frac{1}{2}$, radix cubica per $\frac{1}{3}$: ita $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{m}}$ significant ra-

* *Etsi quantitates surdae seu irrationales*

dicem quadratam, cubicam et radicem quamlibet indeterminatam *m*. Vt autem clara talium expressionum notio habeatur, meminisse oportet, quae antea de exponentibus breviter dicta sunt. Ponamus $a = bb$, erit $a^{\frac{1}{2}} = (bb)^{\frac{1}{2}}$. Praeterea in quantitate $(bb)^3$ exponens 3 indicat, quantitatem *bb* ter scribendam esse, ac proinde $(bb)^3 = b^6$. Igitur eadem ratione in quantitate $(bb)^{\frac{1}{2}}$ exponens $\frac{1}{2}$ designat litteram *b* dimidio minus scribendam esse, quam in *bb*, ac proinde semel tantum. Quare $(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}}\ \sqrt{a}$. *Brevius: quantitas* a *ad quamlibet potestatem*, v.g. *quadratum vel cubum elevatur, si exponens illius* 1 *per exponentem potestatis* 2 *vel* 3 *multiplicetur, seu fiat* $a^{1 \times 2}$, $a^{1 \times 3}$.(§.I.hui.cap.) *Igitur eiusdem operationis resolutio seu radicis extractio fiet, si exponens* 1, *per exponentem radicis* 2 *vel* 3 *dividatur, seu fiat* $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$ Idem patet de aliis quibuscumque exponentibus. Res autem tota ma-

sint incommensurabiles relate ad unitatem vel eius aliquam determinatam partem: sunt tamen persaepe inter se commensurabiles, seu quod idem est, exprimitur plerumque numeris vera ratio, quae inter quantitates surdas vel irrationales intercedit.

gis ac magis illlustrabitur, explicatis quattuor arithmeticae operationibus in quantitatibus surdis.

Quantitates surdae adduntur vel subtrahuntur facillime, si eiusdem sint exponentis, et eamdem habeant sub signo radicali quantitatem. Si autem res non ita se habeat, saepissime contingit, quantitates surdas eiusdem ordinis ad eamdem quantitatem sub signo radicali posse revocari. Ita si addi vel subtrahi debeant quantitates radicales $\sqrt{48abb}$, et $b\sqrt{75a}$, prima per reductionem mutatur in $4b\sqrt{3a}$, altera autem in $5b\sqrt{3a}$. Quare in *additione utriusque quantitatis*, habebitur $9b\sqrt{3a}$; in *subtractione autem primae quantitatis a secunda habebitur* $b\sqrt{3a}$. Totum reductionis artificium in eo consistit, ut numeri sub signo radicali positi quaerantur divisores, inter quos ille eligatur, si quis fuerit; ex quo liceat radicem extrahere eiusdem ordinis; cuius est surda quantitas. Si aliquem eiusmodi divisorem invenias, eius radicem praefige signo radicali, et sub hoc includatur tantummodo alter dati numeri factor seu divisor. Si autem nullus talis divisor inveniri possit, iam quantitates radicales in additione signo $+$ connectendae, in subtractione autem signo $-$ separandae.

Demum multiplicantur et dividuntur quantitates irrationales non secus ac rationales, dummodo exponentes radicum sint eiusdem ordinis, et producto vel quoto idem, quod prius erat, signum radicale praefigitur. Ita si multiplicari de-

beat $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{ac}$, productum erit $\sqrt{aabc} = a\sqrt{bc}$. Ita si dividi debeat $ac\sqrt{bc}$ per $a\sqrt{b}$, quotus erit $\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}$. Patet autem, in multiplicatione delendum esse signum radicale, si aequales fuerint quantitates signo inclusae. Sic $\sqrt{a^3c} \times \sqrt{a^3c} = a^3c$.

Quoniam saepe contingit, quantitates radicales ad eumdem exponentem reducendas esse, observandum est, id facile praestari posse ex hactenus demonstratis. Ita quantitates duae radicales $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, et $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ mutantur in $\sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^m}}$ et $\sqrt[mn]{\frac{c^n}{d^n}}$ quod patet; nam quantitates illae *si repraesententur per radicum exponentes erunt* $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ et $\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{m}}$ *Si exponentes fracti ad eamdem denominationem reducantur, erunt* $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{mn}}$ *et* $\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{n}{mn}}$. *Adeoque* $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ *et* $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ *in aequales permutantur* $\sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^m}}$ *et* $\sqrt[mn]{\frac{c^n}{d^n}}$. Pro-

be autem notandum est discrimen inter quantitatum multiplicationem illarumque potestatem. Ita si multiplicari debeat a^3 per a^2, productum fit $a^{3+2} = a^5$. Si autem quantitas a^3 ad secundam potestatem evehi debeat, habetur $a^{3\times 2} = a^6$. Et generatim quantitas a^m ad potestatem n evecta, fit a^{mn}. Quare multiplicatio fit per *exponentium* additionem, potestas autem per multiplicationem *exponentis quantitatis per exponentem potestatis.* Contraria ratione divisio fit per *exponentium* subtractionem, et radicis extractio per exponentium divisionem. Ita $\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4$. At si ex a^6 extrahenda sit radix quadrata, erit $a^{\frac{6}{2}} = a^3$, et generatim pro divisione $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, at pro radicis n extractione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. *Ex quibus liquet, quod si dividendus et divisor eumdem habeant exponentem, exponens quoti per subtractionem exponentium aequalium abibit in zero. Ita* $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. *At quantitas* $\frac{a^3}{a^3} = 1$. *Ergo* $a^0 = 1$. *Adeoque quaelibet quantitas elevata ad potestatem zero aequalis est unitati. Similiter si exponens di-*

visoris maior sit quam dividendi, exponens quoti ſit negativus. Ita $\frac{a^3}{a^5} = a^{3.5} = a^{-2}$. *Sed* $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$

Ergo quantitas elevata ad potestatem negativam aequalis est fractioni, cuius numerator sit 1; *denominator vero eadem quantitas cum suo exponente positivo.* Si quantitates sint simplices brevius per exponentes quam per signum radicale exprimuntur.

V. Quantitates irrationales sive incommensurabiles saepe in hoc capite nominavimus. Re vera autem tales dari quantitates, evidens est ex capite praecedenti, in quo demonstravimus, fractionem sive puram sive mixtam in fractionem semper abire, etiamsi ad potestatem quamlibet evehatur. Ergo numerus integer, cuius radix quadrata, cubica cet. non est numerus integer, nullam fractionem nequidem mixtam pro radice habere potest, ac proinde huius numeri radix est incommensurabilis. Itaque numeri incommensurabiles non sunt numeri proprie dicti. Et re quidem ipsa quum per numerum nihil aliud intelligamus, quam rationem quantitatis cuiusvis ad aliam eiusdem generis quantitatem, in omni ratione vel numero exsistere necessum est partem aliquotam, quae sit utrique quantitati communis, at quantitates incommensurabiles tali carent mensura. Ita $\sqrt{2}$ non est numerus proprie dictus, quia talis quantitas, *ceu numerica*, inveniri non potest. Immo fractiones proprie non dicuntur numeri, nisi quatenus ad numeros integros revocantur. Et quidem fractio $\frac{3}{4}$, quae ex-

primit quartam partem totius alicuius ter sumtam, ipsa ad numeros integros refertur, haec enim quarta pars velut alia unitas consideratur, ut antea observavimus. Totam incommensurabilium doctrinam utilissimam quidem alio arithmetico exemplo illustrabimus. Si ex numero 7 extrahenda proponatur radix quadrata, haec invenitur minor quam tres; quum $3 \times 3 = 9$, et maior quam 2, quum sit $2 \times 2 = 4$. Igitur radix quadrata numeri 7 continetur intra limites 2 et 3; ac proinde si posset determinari, ea foret aequalis numero 2, et alicui numero fracto; sed fieri non potest, ut fractio mixta per se ipsam multiplicata producat numerum integrum, ut antea demonstravimus. Ergo numerus 7 pro radice habere non potest neque numerum integrum neque fractum. Idem patet de alio quolibet numero integro, cuius radix non est numerus integer.

Scholion. Secundae dumtaxat et tertiae potestatis compositionem ac resolutionem in praesenti capite explicavimus. At rem generatim et breviter, quantum licet, pro alia qualibet dignitate considerabimus. Ex hactenus explicatis manifestum est, eodem modo formari altiores cuiuslibet gradus potestates. Ita ad formandam quarti gradus potestatem multiplicari debet cubus per suam radicem, et sic deinceps. Iam in singulis terminis exponentes et coëfficientes diligenter observemus. In potestatis cuiuslibet compositione primus terminus a binomii cuiuslibet $a + b$, evehitur ad potestatem quaesitam, v. g. a^2, si potestas secunda fuerit. In aliis sequentibus terminis exponens quanti-

tatis *a* per unitatem decrescit, et in ultimo termino evanescit. Ita in secunda potestate habentur *secundus et tertius terminus* $2a+b\,a^0 b^2 = 2ab+b^2$. Contra autem potestas termini *b* in primo termino non reperitur, seu est b^0, sed in 2° termino illius exponens est unitas, in 3° termino est 2, et ita crescit per gradus, donec in ultimo termino exponenti potestatis quaesitae aequalis fiat. Quare iisdem gradibus, quibus decrescunt exponentes ipsius *a*, crescunt exponentes quantitatis *b*, atque in utraque quantitate exponentium summa semper eadem est, et maximus exponens est potestatis quaesitae exponenti aequalis, quod quidem in potstate qualibet experiri licet. Ita potestas sexta binomii $a+b$, invenitur $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$. In qua observare licet, exponentes quantitatis *a* decrescere secundum seriem numerorum 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; contrario autem ordine crescere exponentes quantitatis *b*, nempe hoc modo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, numerusque exponentium in utroque termino est semper 6. Iam superest, ut singulorum terminorum coëfficientes observemus. *Primi termini coëfficiens semper est unitas; in reliquis autem terminis ita invenitur*: dividatur coëfficiens praecedentis termini per exponentem ipsius *b* in termino dato, et quotum multiplica per exponentem ipsius *a* in eodem termino auctum unitate. Ita in praecedenti exemplo, ubi termini sunt a^6, a^5b, a^4b^2, a^3b^3, a^2b^4, ab^5, b^6, coëfficiens primi termini est unitas: coëfficiens secundi est *coëfficiens primi termini* 1 *divisus per exponentem* b, *seu per* 1,

ductus in exponentem ipsius a^5 *auctum unitate, seu* $5+1=6$, *hoc est*, $\frac{1}{1}\times\overline{5+1}=6$: tertii termini coëfficiens $\frac{6}{2}\times\overline{4+1}=3\times5=15$: coëfficiens termini quarti est $\frac{15}{3}\times\overline{3+1}=5\times4=20$. Et simili modo invenientur coëfficientes alii 15, 6, 1.

Ex hac constanti exponentium et coëfficientium serie generatim exhiberi potest binomium $a+b$ ad potestatem quamlibet m evectum. Ita terminorum series se habebit, non consideratis coëfficientibus: $a^m b^0$, $a^{m-1}b^1$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$, quae series continuari debet, donec exponens quantitatis b evadat m. Coëfficientes autem ex praecedenti regula hoc ordine progredientur 1, m, $m\times\frac{m-1}{2}$, $m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}$, $m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}$ et ita deinceps. Quare haec habetur generalis formula $\overline{(a+b)}^m = a^m + ma^{m-1}b\ m\times+\frac{m-1}{2}\times a^{m-2}b^2 + m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times a^{m-3}b^3$ cet. Simili modo invenitur formula pro binomio $\overline{(a-b)}^m$, hoc solum observato

discrimine, quod terminus debeat esse negativus, si exponens quantitatis b sit numerus impar. Ita in cubo $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ secundus et quartus termini sunt negativi. Ratio autem est evidens, quum negativa exsistente quantitate, multiplicationum numerus impar productum efficere debeat negativum. Formula eadem omnino ratione componi posset pro trinomio $a + b + c$, ponendo $a + b = n$, et ita deinceps pro polynomio quolibet. Praecedens formula, quae potestatum compositionem exhibet, earum quoque resolutionem repraesentare potest. Ita radix quadrata binomii $a + b$ nihil est aliud, quam potestas binomii $a + b$, cuius exponens $\frac{1}{2}$. Quare ponatur in formula praecedenti $m = \frac{1}{2}$, habebiturque

$$\overline{a+b}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(a^{-\frac{1}{2}} b\right) - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\left(a^{-\frac{3}{2}} b^2\right) + \frac{1}{4 \cdot 3} \times \frac{1}{2}$$

$$\times \frac{3}{2}\left(a^{-\frac{5}{2}} b^3\right) \text{cet.} = a^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^2} + \frac{b^3}{16a^3}\right) \text{cet.}$$

Simili modo si extrahenda sit radix quinta ex $a+b$,

$$\text{habebitur } \left(a + b\right)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5}\left(a^{-\frac{4}{5}} b\right) - \frac{1 \times 4}{2 \times 25}$$

$$\left(a^{-\frac{9}{5}} b^2\right) \text{cet.} = a^{\frac{1}{5}}\left(1 + \frac{b}{5a} - \frac{2bb}{25aa} + \text{cet}\right)$$ Itaque

ad radicem proxime veram accedere possumus per series infinitas convergentes, hoc est, per series, quorum termini perpetuo decrescant.

CAPVT VI.

De proportionibus.

I.

In memoriam revocanda est explicata cap. 1. rationis et proportionis definitio. *Ratio* dicitur: *ea duarum quantitatum habitudo, qua ad se invicem referuntur.* *Geometrica* dicitur: *si in ea relatione consideremus quomodo quantitas una alteram contineat; arithmetica* vocatur: *si excessum tantummodo unius supra aliam spectemus.* In omni ratione quantitas, quae ad aliam refertur, *antecedens* dicitur, ea vero, ad quam refertur, *consequens* appellatur. Ratio *geometrica* dicitur *dupla, tripla, decupla* cet. si antecedens bis, ter, decies cet. consequentem continet; contra vero *subdupla, subtripla, subdecupla* cet. si bis, ter, decies cet. antecedens in consequenti continetur. *Exponens* rationis geometricae dicitur: *quotus ex antecedenti per consequentem diviso*; exponens vero rationis arithmeticae est: *differentia consequentis ab antecedenti.* Hinc ratio geometrica instar fractionis scribitur, arithmetica instar subtractionis. *Duarum rationum aequalitas* dicitur *proportio.* Ea est *geometrica* vel *arithmetica* pro rationum ipsarum qualitate. Igitur in omni proportione quattuor quantitates esse debent, et *prima ad secundam esse* dicitur, *ut tertia ad quartam.* Si vero eadem quantitas bis adsumatur ita, ut primae rationis consequens idem sit cum antecedente secundae, proportio dicitur *continua.* Ita exprimi solet proportio geometrica $a.b::c.d$, vel $a:b$

$= c : d$, vel $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; arithmetica vero $a - b = c - d$.

II. Si inter duas primas quantitates eadem sit differentia, quae inter duas ultimas, iam quantitates illae sunt *arithmetice proportionales*, ut patet ex praecedenti definitione, quare arithmetice proportionales sunt numeri 3, 7, 12, 16; atque etiam quantitates a, $a + b$, e, $e + b$. Si autem talis proportio continuetur ita, ut quantitates per eamdem constantem differentiam perpetuo crescant vel decrescant, iam habetur series vel *progressio arithmetica*, qualis est ista a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$ cet. vel haec alia x, $x - b$, $x - 2b$ cet. aut etiam in numeris 1, 2, 3, 4, 5 cet. et 10, 7, 4, 1, -2, -5, -8 cet. Ex ipsa proportionis arithmeticae natura evidens est, summam extremorum terminorum aequalem esse summae mediorum. Ita in proportione arithmetica $a - (a + b) = e - (e + b)$ manifestum est, summam extremorum $a + e + b$, aequalem esse summae mediorum $a + b + e$. Hinc datis tribus quantitatibus, facile invenitur quarta arithmetice proportionalis: addantur scilicet secunda et tertia, atque ex summa auferatur prima, differentia erit quartus terminus arithmetice proportionalis, ut patet.

Inde etiam colligitur, in progressione qualibet arithmetica summam duorum extremorum aequalem esse summae duorum quorumlibet terminorum ab extremis aeque distantium. Sint priores termini a, $a + b$, $a + 2b$ cet. sitque ultimus terminus x, erit penultimus $x - b$, antepenultimus $x - 2b$ cet. Iam com-

parentur inter se termini, qui ab extremis aeque distant in hunc modum:

$$\begin{array}{l} a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b \text{ cet.} \\ x,\ x-b,\ x-2b,\ x-3b,\ x-4b \text{ cet.} \\ \hline a+x,\ a+x,\ a+x,\ a+x,\ a+x \text{ cet.} \end{array}$$

Si nempe singuli termini correspondentes, et qui ab extremis aequaliter distant, sibi invicem addantur, habebitur semper $a+x$, hoc est summa primi termini a et ultimi x. Atque hinc etiam evidens est, summam omnium terminorum in progressione arithmetica aequalem esse producto ex summa primi et ultimi in dimidium terminorum numerum. Ita si numerus terminorum dicatur n, erit omnium summa $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$

III. Quum differentia communis terminorum in progressione arithmetica primum terminum non adficiat, patet huius differentiae coëfficientem in quolibet dato termino aequalem esse numero terminorum, qui terminum datum praecedunt. Quare in ultimo termino x habebitur illa $\overline{n-1} \times b$, nempe $x = a + \overline{n-1} \times b$. Igitur quum omnium terminorum summa sit $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$, ea quoque invenitur $= \frac{2an + bn^2 - bn}{2} = \left(\frac{2a+bn \cdot b}{2}\right) \times n$. E. g.

Series arithmetica $1+2+3+4+5$, cet. ad 100 terminos producta $= \frac{2\times 100 + 10000 - 100}{2} = 5050$.

At si progressionis primus terminus fuerit o, erit progressionis summa aequalis dimidio producto ex ultimo termino in numerum terminorum. Nam in hoc casu quum sit $a = 0$, summa terminorum, quae generatim exprimitur per $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$ in hanc abit $\frac{nx}{2}$. Vnde patet, summam numeri cuiuslibet terminorum in progressione arithmetica, cuius primus terminus est o, aequalem esse dimidio producto ex terminorum numero in terminum maximum. E. g. Progressio arithmetica.

$$\left.\begin{matrix} 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9= \\ \frac{9+9+9+9+9+9+9+9+9+9=}{2} \end{matrix}\right\} \frac{10\times 9}{2} = 45.$$

IV. Si quotus ex duabus primis quantitatibus, aequalis sit quoto ex duabus ultimis, quattuor illae quantitates sunt *geometrice proportionales*, ut patet ex praecedenti definitione. Tales sunt numeri 2, 6, 4, 12, et quantitates a, ar, b, br, Ex ipsa proportionis geometricae natura evidens est, productum ex terminis extremis aequale esse producto ex mediis; sic $a\times br = ar \times b$, ut patet. Quare datis tribus terminis facile invenitur quartus geometrice proportionalis: multiplicando scilicet duos medios terminos, productumque dividendo per primum, quotus erit quartus quaesi-

tus. Ita datis tribus quantitatibus a, ar, b, invenitur quarta $\frac{ar \times b}{a} = br$. At si proportio sit continua ita, ut secunda quantitas sit primae rationis consequens, et simul secundae rationis antecedens, simili ratiocinatione patet, sumendum esse huius quantitatis quadratum, et per primam quantitatem esse dividendum. Haec autem quantitas, quae antecedentis et consequentis vices gerit, vocatur *media proportionalis*, talisque proportio ita exprimitur $\div a. b. c$, nempe hoc scribendi modo significatur, b esse mediam proportionalem. At media proportionalis arithmetica ita designatur $\div a. b. c$. Patet autem, in hac proportione summam extremorum aequalem esse termino medio bis sumto.

Ex demonstratis de proportione geometrica pendet vulgarissima arithmeticae operatio, quae *regula trium* vel etiam *regula aurea* propter eximiam utilitatem appellari solet. Per hanc regulam, datis tribus terminis, invenitur quartus proportionalis. In hac autem operatione probe observari debet terminorum ordo. Et primo quidem consideranda est quantitas, quae est eiusdem generis cum quantitate quaesita. Ex quaestionis natura intelligitur, an quantitas data sit maior vel minor quantitate quaesita; si maior sit, iam maxima ex aliis duabus quantitatibus in terminorum ordine ad sinistram scribi debet; at si minor sit, tunc duarum aliarum quantitatum minima ad sinistram, alia autem ad dexteram collocari debet. Constituto autem convenienti terminorum ordine iam ex prae-

scripto regulae, productum ex secundo termino in tertium per primum terminum dividi debet. Tota res exemplo perspicua fiet. Haec proponatur quaestio. *Si* 30 *homines* 15 *diebus absolvant* 150 *operis hexapedas; quaeritur, quot hexapedas conficient* 40 *homines eodem tempore.* Quoniam quaeritur hexhapedarum numerus, primum considerandus est numerus 150. Statim autem vides, numerum quaesitum *hexapedarum maiorem esse debere dato hexapedarum numero, sicuti* 40 *homines plures numero sunt quam* 30. Quare numerus 30 ad sinistram collocari debes in priori ratione, numerusque 40 ad dexteram atque ita operatio peragitur: 30: 40 = 150:

$$\frac{40 \times 150}{30} = \frac{4 \times 150}{3} = 200.$$

V. Pro varia terminorum ordinatione in proportione geometrica diversa ab arithmeticis inventa fuerunt nomina. At ex prima terminorum ordinatione aliae omnes facile inferuntur. Si primus terminus dicatur esse ad tertium, ut secundus ad quartum, argumentari dicimur *alternando.* Si dicatur secundus ad primum, ut quartus ad tertium, tunc dicitur *invertendo.* Si summa terminorum primi et secundi refertur ad secundum, ut summa terminorum tertii et quarti ad quartum, inferri dicimur *componendo*; contra autem *dividendo*, si terminorum primi et secundi differentia ad secundum referatur, ut differentia tertii et quarti refertur ad quartum. In his autem omnibus argumentandi modis proportionem manere patet, quum productum extremorum aequa-

le semper inveniatur producto mediorum. *Ita in proportione* a : ab = c : cb *erit etiam* a : c = ab : cb. *Itemque* ab : a = cb : c ; *quum in utroque casu sit productum extremorum* abc *aequale producto mediorum* abc. *Pariter* a + ab : ab = c + cb : cb, *atque etiam* a — ab : ab = c — cb : cb ; *quum in primo casu sit productum extremorum et mediorum* acb + ab²c ; *in secundo autem* acb — ab²c. Ex eadem productorum aequalitate facile colligitur, rationum compositione proportionem non mutari. Ratio *composita* ex pluribus geometricis rationibus illa dicitur quam habet productum ex earum antecedentibus ad productum ex consequentibus. Sint duae proportiones

$$\left.\begin{matrix} a : b = c : d \\ f : g = n : s \end{matrix}\right\} \text{erit } af : bg = cm : ds.$$

Etenim productum extremorum $afds$ aequale est producto mediorum $bgcm$. Et quidem $a : b = c : d$, ac proinde $ad = bc$. Praeterea $f : g = m : s$; ideoque $fs = gm$, ergo $ad \times fs = bc \times gm$. Simili ratione patet $\frac{ad}{fs} = \frac{bc}{gm}$, *adeoque* ad : fs = bc : gm. Atque eadem valet demonstratio pro alio quolibet proportionum numero. Ratio ex duabus aequalibus composita dicitur *duplicata*, ex tribus *triplicata* cet. Hinc ratio geometrica, quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius, est duplicata eius, quam habent ipsae invicem quantitates: ratio cuborum, triplicata cet. Et contra ratio, quam habent inter se radices quadratae, cubicae cet. dicitur *subduplicata*, *subtriplicata* cet.

rationis potentiarum *respectivarum*. At ratio, quae intercedit inter radices quadratas cuborum, hoc est, ratio $a^{\frac{3}{2}}$ et $b^{\frac{3}{2}}$ dicitur *sesquiplicata*.

Si duae quantitates ita inter se connexae sint, ut si una sit dupla, tripla cet. altera etiam dupla, tripla cet. evadat, prima dicitur esse in *ratione directa simplici* alterius. At si prima in eadem ratione decrescit, in qua altera augetur, tunc illa esse dicitur in *ratione inversa* sive *reciproca* istius. At si duae quantitates ita sint invicem connexae, ut altera crescat in eadem ratione, qua primae quadratum aut cubus cet. tunc illa ad hanc esse dicetur in ratione duplicata, triplicata cet. At si in eadem ratione una decrescit, qua crescunt alterius quadrata vel cubi, dicetur esse in ratione huius *reciproca* duplicata aut triplicata cet. Harum rationum frequentissimus usus recurret in physica. *Quod ad rationem inversam simplicem spectat, res sequenti exemplo manifesta fiet.* Si 40 operarii dierum 18 spatio opus aliquod absolvant, quaeritur necessarius operariorum numerus, ut idem opus 12 diebus absolvatur. *Inspecta autem quaestionis natura, statim patet, quaesitum operariorum numerum non minorem esse debere relate ad* 40, *sicut* 12 *minor est relate ad* 18, *sed e contrario maiorem; proindeque evidens est, operariorum numerum quaesitum esse in ratione inversa dierum. Quapropter in priore ratione proportionis, quae exprimet dies, invertentur numeri, seu minor sinistram tenebit, et maior dexteram.*

E. g. $12 : 18 = 40 : \frac{18 \times 40}{12} = 60$.

VI. Ex mediorum et extremorum prodūcto pendet etiam universa progressionum geometricarum doctrina. In progressione qualibet geometrica productum ex primo in ultimum terminum semper aequale est producto ex secundo et penultimo, aut etiam alteri cuilibet producto ex duobus terminis a primo et ultimo aequaliter distantibus. Sit progressio a, ar, ar^2, ar^3, in qua communis multiplicator aut divisor *ratio communis*, aut *exponens communis rationis* dici solet, sitque y ultimus terminus; erunt quattuor ultimi termini y, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{y}{r^3}$: ut patet ex natura progressionis geometricae. Est autem $a \times y = ar \times \frac{y}{r} = ar^2 \times \frac{y}{r^2} = \frac{ar^3 \times y}{r^3}$ cet. Praeterea summa progressionis geometricae, demto primo termino, aequalis est summae omnium terminorum, demto ultimo per communem rationem seu *per communem exponentem rationis* multiplicato.

Nam $ar + ar^2 + ar^3 +$ cet. $+ \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r} + y =$

$r \times \left(a + ar + ar^2 \text{ cet.} + \frac{y}{r^4} + \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r}. \right)$

Quare si progressionis summa dicatur s; erit

$s-a = \overline{s-y} \times r$, hoc est, $s-a = sr-yr$, vel $sr-s = yr-a$, et $s = \frac{yr-a}{r-1}$.

Quamvis autem ex arithmeticarum operationum natura facile pateat, qua ratione ad hunc ultimum valorem perveniatur; res tamen magis fiet manifesta ex appendice, quam de aequationibus mox adiungemus. Porro quum exponens ipsius r post secundum terminum perpetuo crescat, si numerus terminorum dicatur n, erit $n-1$ exponens ipsius r in ultimo termino; ac proinde $y = ar^{n-1}$, et $yr = ar^{n-1+1} = ar^{n}$, et $s = \frac{yr-a}{r-1} = \frac{arn-a}{r-1}$. Quare datis in progressione geometrica primo termino, terminorum numero et communi ratione *seu communi exponente rationis*, facile invenietur omnium terminorum summa. Si invenienda sit summa seriei decrescentis $y + \frac{y}{r} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r^3} + \text{cet.} + ar^3 + ar^2 + ar + a$ posito terminorum numero infinito, ultimus terminus a fit $= 0$. Quum enim n sit infinitus, ac proinde et infinitus r^{n-1}; erit $a = \frac{y}{r^{n-1}} = 0$. Quare summa talis seriei est $s = \frac{yr}{r-1}$ quae est summa finita, quamvis numerus terminorum seriei sit

infinitus; ita series infinita est $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +$ cet. $= 2$.

De logarithmis.

Scholion. Ad progressiones arithmeticas et geometricas refertur logarithmorum doctrina, maximae quidem utilitatis in physica sublimiori, sed rem breviter tantum attingere nobis licebit. Progressio quaelibet geometrica hac formula potest repraesentari $\div aq^0 . aq^1 . aq^2 . aq^3 . aq^4 . aq^5$. cet. in qua a et q exprimunt numeros quoslibet. Quare si fiat $a = 1$, praecedens series abit in hanc $\div q^0 . q^1 . q^2 . q^3 . q^4 . q^5$. cet. Inde autem duo colliguntur. 1.° Productum ex duobus quibuscumque huius progressionis terminis pro exponente habet ipsorum exponentium summam. (*cap.* V. §. IV. *ad calc.*) Ita productum ex $q^1 \times q^4 = q^5$. Quare si inveniendus proponatur in hac progressione terminus, qui sit duorum aliorum producto aequalis, quaeratur terminus, cuius exponens est ipsa duorum exponentium summa . . . II.° Quotus ex duobus terminis emergens ipse est terminus, cuius exponens est ipsa exponentium differentia. Ita si dividatur q^8 per q^3, quotus est $q^{8-3} = q^5$. Quare si inveniendus proponatur terminus duorum aliorum quoto aequalis, quaeratur terminus, cuius exponens aequalis est exponentium differentiae.

Si ponatur progressionis geometricae terminus aliquis q, atque exponens rationis sit $\frac{1}{n}$, progressio quaelibet geometrica hac serie in infinitum re-

praesentari potest: $\div \frac{q}{n^5} . \frac{q}{n^4} . \frac{q}{n^3} . \frac{q}{n^2} . \frac{q}{n} . q . qn . qn^2 . qn^3 . q^4 . qn^5 = \div qn^{-5} . qn^{-4} . qn^{-3} . qn^{-2} . qn^{-1} . qn^0 . qn^1 . qn^2 . qn^3 . qn^4 . qn^5$. cet. ut patet. Si infra progressionem geometricam scribatur progressio arithmetica ita, ut singuli termini unius respondeant singulis terminis alterius hoc pacto:

$\div qn^{-4} . qn^{-3} . qn^{-2} . qn^{-1} . qn^0 . qn^1 . qn^2 . qn^3 . qn^4$. cet.

$\div -4 -3 -2 -1 \quad 0 +1 +2 +3 +4$ cet.

Termini quilibet progressionis arithmeticae $-4 -2 +3 +4$ appellantur *logarithmi* terminorum respondentium in progressione geometrica qn^{-4}, qn^{-2}, qn^3, qn^4. Inde autem patet, multipliciter variari posse logarithmorum formam. Etenim si duae sint progressiones, quarum altera geometrica sit, altera arithmetica, et sub singulis primae terminis singuli secundae scribantur, undecumque initium fiat, hi dicuntur illorum *logarithmi.* At in vulgari logarithmorum systemate numeri alicuius logarithmus vocatur exponens potestatis numeri denarii, quae sit numero dato aequalis. Ita si habeantur duae sequentes progressiones, prior geometrica, et arithmetica altera:

$\div 10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3 . 10^4 = \div 1 . 10 . 100 . 1000 . 10000$.

$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4$. . . . .

Exponens 0 est logarithmus unitatis; exponens 1 est logarithmus 10, et ita deinceps. At quia exponentes illi exhibent dumtaxat logarithmos numerorum integrorum in progressione decupla: 1, 10, 100, 1000, 10000 cet. necessum est praeterea, haberi logarithmos numerorum in-

termediorum, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12 cet. Qua ratione autem formari possint logarithmorum tabulae, breviter exponam; neque enim doctrinam hanc fusius explicare licet pro iniuncta his elementa facilitate.

Vt habeatur numeri alicuius dati, e. g. 3 logarithmus, oportet numerum hunc inveniri in progressione geometrica 1, 10, 100 cet. quod ex dictis patet. Porro quamvis non pateat, numerum 3 locum habere posse in praedicta progressione, evidens tamen est, inserendo inter 1 et 10 terminos medios geometrice proportionales, obtineri numeros inter 1 et 10, eo proximius, quo maior est terminorum insertorum numerus. Vnde fiet, ut horum terminorum mediorum aliquis vel sit numerus 3 accurate, vel inveniantur termini duo contigui, inter quos numerus 3 contineatur quamproxime. *Et quidem tabularum constructores, ut plurimos eiuscemodi terminos medios interponerent, superiorem progressionem geometricam* ∺ 10^0. 10^1. 10^2. 10^3. 10^4. *ope fractionum decimalium in aequalem converterunt:* $10^{0,0000000}$ $10^{1,0000000}$ $10^{2,0000000}$ $10^{3,0000000}$ $10^{4,0000000}$ cet. *atque eo pacto inter singulos progressionis exponentes medii termini* 9999999 *inserti fuere, quorum differentia est* $\frac{1}{10000000}$. Iam vero quia exponentes illi semper sunt in progressione arithmetica, ex dictis evidens est, valorem numeri denarii ad illas potestates evecti, quarum indices sunt iidem exponentes, perpetuo manere in progressione geo-

metrica, atque eosdem exponentes esse horum numerorum logarithmos. Habebitur igitur nova progresſio geometrica hoc modo: $10^{0,0000000}$ $10^{0,0000001}$ $10^{0,0000002}$ $10^{0,0000003}$ $10^{0,0000004}$. In qua quidem progressione observandum est, numeros lentissime crescere, *quum ex primo termino* 1 *seu* $10^{0,0000000}$ *usque ad* 10, *seu* $10^{1,0000000}$ *sint* 9999999 *termini intermedii.* Ergo inter eos erit aliquis intermedius = 2, vel 3, vel 4 cet. Ita 2 inventus est terminus $10^{0,3010300}$: $3 = 10^{0,4771213}$: $4 = 10^{0,6020600}$. Quare exponentes illi sunt logarithmi numerorum 2, 3, 4 cet. Hoc artificio et patientissimo multorum annorum labore supputatae sunt logarithmorum tabulae.

Commodissimae sunt tabulae illae. Etenim quum demonstratum sit (*cap. v. §. iv. ad calcem*) logarithmum producti ex duobus numeris, logarithmorum summae aequalem esse; logarithmorum vero differientiae aequalem esse logarithmum quoti; per solam additionem et subtractionem compendiose absolvi possunt multiplicatio et divisio. Sumantur datorum numerorum 3 et 5 logarithmi, iique addantur, numerus summae respondens in logarithmorum tabulis erit logarithmus producti 15. Contra autem logarithmorum differentia erit logarithmus quoti. Ita si a logarithmo numeri 15 subtrahatur in tabulis logarithmus numeri 5, differentia erit logarithmus numeri 3. Simili ratione patet, numerum quemlibet ad datam potestatem evehi, si sumatur numeri dati logarithmus, et per exponentem potestatis multiplicetur; productum enim erit quaesiti numeri logarithmus. Contra

autem si numeri dati logarithmus per exponentem radicis dividatur, quotus erit quaesitus radicis logarithmus.

APPENDIX.

De aequationibus.

I.

AEquatio dicitur: *propositio duarum quantitatum aequalitatem adfirmans, interposito aequalitatis signo* = AEquatio valorem quantitatis alicuius repraesentat, si ex una aequationis parte habeatur quantitas sola quaesita, in parte autem altera occurrant quantitates, quae omnes sint cognitae. Ita si habeatur $x = \frac{4 \times 6}{3} = 8$, notus est valor ipsius x. Itaque in omni resolvenda aequatione id curandum est, ut nempe quantitas, cuius valor quaeritur, in una aequationis parte sola contineatur, pars autem altera solas quantitates cognitas contineat. In hac autem appendice duplex dumtaxat aequationum genus considerabimus, eas scilicet, in quibus quantitas incognita vel unius est dimensionis seu primi gradus, vel ad secundam dimensionem seu secundum gradum evehitur. Quod ad primi gradus aequationes spectat, totum artificium regulis quibusdam explicabimus, variisque numeris distinguemus. 1.° Ex una aequationis parte in alteram transfertur quantitas aliqua, facta signorum permutatione, ut in hoc

exemplo : $5x + 50 = 4x + 56$; $5x - 4x = 56 - 50$, et $x = 6$. II.° Si quantitas incognita quantitatibus aliis per multiplicationem aut divisionem permixta sit , ab iis liberari debet in primo casu per divisionem , in casu altero per multiplicationem. Sit $3x + 12 = 27$, erit $3x = 27 - 12 = 15$, et $x = \frac{15}{3} = 5$. Sit autem $\frac{x}{5} + 4 = 10$ seu $\frac{x+20}{5} = 10$; erit $x + 20 = 50$, et $x = 50 - 20 = 30$. III.° Proportio quaelibet geometrica converti potest in aequationem , facta extremorum et mediorum multiplicatione. Sit $12 - x : \frac{x}{2} = 4 : 1$, erit $12 - x = 2x$; quare $3x = 12$, et $x = 4$. Simili ratione proportio arithmetica in aequationem per additionem mutari potest. IV.° Loco quantitatis cuiuslibet in aequatione alia eiusdem valoris substitui potest. Sit $3x + y = 24$, et $y = 9$, erit $3x + 9 = 24$, $x = \frac{24-9}{3} = 5$.

V.° Si pars aequationis quantitatem quaesitam continens signo aliquo radicali adficiatur , delendum est signum radicale , et altera pars aequationis ad eam evehi debet potestatem , quam indicat ipsum signum radicale. Sit $= \sqrt{ax + b^2} - c = d$, erit $\sqrt{ax + b^2} = d + c$, et $ax + b^2 = 2cd + c^2$;

quare $x = \frac{d^2 + 2cd + c^2 - b^2}{a}$.

II. His praemissis permutationum regulis, quae ex antea demonstratis facile intelliguntur, iam problema aliquod unius dimensionis solvendum ponemus. Et primo quidem quaestionis propositae distincta habeatur notio, et singulae conditiones attente considerentur. Si alicuius problematis conditiones ita exprimantur, ut tot habeantur incognitae, quot aequationes; poterit semper deveniri ad unicam aequationem, quae unicam incognitam habeat. Nam sint e. g. 10 aequationes et totidem incognitae; poterit conferendo primam cum secunda eliminari per regulas praescriptas una ex iis incognitis inveniendo novam aequationem, quae illa careat: tum idem praestari poterit conferendo primam cum tertia, et ita porro, ac habebuntur iam novem aequationes cum novem incognitis, quae eodem artificio ad octo reduci poterunt cum octo incognitis; et ita porro, donec perveniatur ad unicam aequationem cum unica incognita. Hinc si habeantur tot aequationes, quot incognitae, problema dicitur *determinatum*; et unicam vel finitas numero solutiones admittit. Si fuerint plures incognitae quam aequationes, problema dicitur *indeterminatum*, et solutiones habet infinitas. AEquatio $3x + \frac{1}{2}x = 20$ est aequatio determinata, sed $x + y = 12$ est indeterminata. Etenim si ponatur $x = 1$, et $y = 11$,

vel $x = 2$, et $y = 10$, et ita porro, semper invenietur $x + y = 12$, ita ut infiniti sint valores, qui pro x et y positi numerum datum restituant. Regulas hactenus explicatas ad facile exemplum transferamus. Mercator quidam nummos quotannis triente adauget, demtis 100 nummis, quos annuatim impendit in sumtus, et post tres annos sit duplo ditior, quaeruntur nummi, *quos ab initio habet, indeque etiam innotescent, quos habet post annos tres*. In hoc problemate plures latent conditiones sic evolvendae, et enuntiandae. Quantitates incognitae ultimis alphabeti litteris designari solent. Itaque mercator habet certam nummorum summam; quae dicatur x. Anno primo expendit nummos 100. Quare residuum est $x - 100$, quod adauget triente, *seu tertia parte*. Ideoque *pecunia mercatoris sub fine primi anni* est, $x - 100 + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$. Anno secundo expendit nummos 100, quare residuum $\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$, quod adauget triente, *seu tertia parte*. Ideoque fit *pecunia mercatoris sub* fine secundi anni, $\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9}$ $= \frac{16x-2800}{9}$. Anno tertio expendit nummos 100,

ideoque residuum est $\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$, quod adauget triente *seu tertia parte*. Quare fiunt *mercatoris nummi sub anni tertii fine* $\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=\frac{64x-14800}{27}$. Tandem ex conditione problematis post tres annos fit duplo ditior. Ergo $\frac{64x-14800}{27}=2x$. Quaestio itaque ad aequationem reducitur, ex qua erui debet x. Vtramque aequationis partem multiplica per 27, productum fit $64x-14800=54x$. Aufer ex utroque aequationis membro $54x$; residuum est $10x-14800=0$, seu $10x=14800$; dividas per 10, habetur $x=1480$. Quare habentur nummi sub initio, et ipsum lucrum.

III. Si in aliquo solvendo problemate perveniatur ad aequationem, quae ipsum quantitatis incognitae quadratum, et praeterea productum ex ipsa quantitate incognita in aliquam datam quantitatem involvat, haec aequatio dicitur *secundi gradus* vel *quadratica*. In talibus autem aequationibus hac regula utendum est. Singulos aequationis terminos, qui incognitam quantitatem continent, ad unam partem transferas ita, ut singuli termini cogniti ex parte altera maneant. Si quantitatis incognitae quadratum coëfficiente aliquo adficiatur, per hunc coëfficientem singuli aequationis termini dividantur. Tandem dimidii

coëfficientis quantitati incognitae praefixi sumatur quadratum, quod ex utraque parte addatur. Iam pars aequationis, quae incognitam quantitatem continet, ad perfectum quadratum reducta habebitur; ex qua proinde radix quadrata extrahi poterit, et deinde per regulas praescriptas quantitatis incognitae valor eruetur. Ponamus $y^2 + ay = b^2$: addatur hinc et inde quadratum dimidii coëfficientis a; erit $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2$; extractaque radice fiet $y + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2}$, et tandem $y = +\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{a}{2}$. Diligenter observandum est, radici quadratae praefixum fuisse signum $\pm$, hoc est, $+$ vel $-$. Etenim radix quadrata cuiuslibet quantitatis, ut a^2, potest esse $+a$, vel $-a$, ideoque $y + \frac{a}{2} = +\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}aa}$ vel $-\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2}$; quum $-\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \times -\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$ restituat quadratum $b^2 + \frac{a^2}{4}$, non secus ac facit $+\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \times + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. Qua-

re aequationes quadraticae duas admittunt solutiones. Sic in praesenti exemplo duo sunt valores radicis y, unus nempe $y = + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$; alter autem $y = - \sqrt{b^2 + \frac{a}{4}} - \frac{a}{2}$.

De quantitatibus imaginariis.

Scholion. At quoniam positiva sunt omnium quantitatum quadrata, hinc patet, quantitatis negativae radicem esse impossibilem, seu adsignari non possc, quae ideo dicitur *imaginaria.* Aliquando contingit, aequationes nullam solutionem admittere. Exemplo sit $y^2 - ay + 3a^2 = 0$; erit $y^2 - ay = -3a^2$, et $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = - 3a^2 + \frac{a^2}{4} = - \frac{11a^2}{4}$. Extractaque radice habebitur

$$y - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{- \frac{11a^2}{4}},\ y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{- \frac{11a^2}{4}}.$$

Ex quibus manifestum est, duos valores radicis y esse imaginarios, quum adsignari non possit radix quantitatis $- \frac{11a^2}{4}$. Si ergo in solutione problema-

tum deveniatur ad quantitates imaginarias, signum est admodum manifestum, vel problema esse impossibile, vel adhibitam esse methodum, quae aliquid impossibile involvit, prorsus ut fit in argumentatione, dum res ad absurdum reducitur.

IV. Radices imaginariae, quae eamdem sub signo radicali quantitatem habent, ut $\sqrt{-a}$, $-\sqrt{-a}$, per multiplicationem efficere possunt productum reale, in quo nullum supersit signum radicale, dummodo radices illae numero pari semper multiplicentur. Etenim evanescere non potest signum radicale, nisi terminus hoc signo adfectus multiplicetur per alium terminum, qui idem signum radicale habeat, et eamdem quantitatem signo inclusam. Iam vero ita sublato signo radicali, si productum ex prima multiplicatione per idem signum radicale multiplicetur, novum productum adficietur quoque signo radicali; at si rursus multiplicetur per idem signum radicale, iterum evanescet signum radicale, et ita deinceps. Si polynomii terminus aliquis contineat radicem imaginariam, quale est polynomium $x-a-\sqrt{-b}$, evanescere non potest signum radicale, nisi polynomium datum multiplicetur per aliud, quod a primo differat tantum, quod ad signum vinculo radicali praefixum. Ita in polynomio proposito solum productum ex $x\cdot a-\sqrt{-b}$ in $x-x+\sqrt{\cdot b}$ delere potest signum radicale, factaque multiplicatione habetur $xx-2ax+aa+b$. In hoc enim solo casu producta singula ex unoquoque termino

reali in $\sqrt{-b}$ sese mutuo signis contrariis elidunt, atque hinc patet, et terminum b, qui continet productum ex duobus radicalibus $+\sqrt{-b} \times -\sqrt{-b}$. esse necessario positivum. Itaque quantitatum imaginariarum frequens usus occurrere potest; ipsa enim impossibilitas non solum per multiplicationem aliquando tollitur, sed etiam summa binarum quantitatum, quae ex realibus et imaginariis sunt mixtae, realis esse potest. Ita quantitatum $3 + \sqrt{-1}$, et $8 - \sqrt{-1}$ summa est realis, nimirum 11, atque etiam realis est differentia, nempe 5, *si* $3+\sqrt{-1}$ *subtrahenda sit ex quantitate* $8 + \sqrt{-1}$.

V. AEquationes omnes secundi gradus repraesentari solent hac formula $x^2 - px = q$, in qua p et q designant quantitates quaslibet vel positivas vel negativas. Inde autem statim concluditur $x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hinc autem difficultates aliquae suboriri possent ex praecedentibus facile explicandae. Quaeri etenim potest, cur quantitas positiva $x - \frac{p}{2}$ aequalis fiat negativae $-\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Re quidem vera duo quadrata ae-

qualia praebent aequales radices, sed radices illae eiusdem signi esse debent. Etenim ex eo, quod $4 = 4$, concludi non potest $2 = -2$. Praeterea $\frac{p}{2} - x$ tam est radix ipsius $xx - px + \frac{pp}{4}$, quam $x - \frac{p}{2}$. Quare scribendum videtur $+ x \pm \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Has difficultates facile solvemus, si observetur, hanc ultimam aequationem in quattuor sequentes resolvi posse, $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$, $x - \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $\frac{p}{2} - x = -\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Ex his quattuor *aequationibus prima et quarta*; *secunda et tertia per transpositionem in eamdem recidunt*; quare satis est duplex signum $\pm$ in una aequationis generalis parte adhibere, ut fieri solet. Praeterea aequationis resolutio hoc modo institui posset.

Radix quadrata aequationis $xx - px + \frac{pp}{4}$ est

$x - \frac{p}{2}$, si x sit maior quam $\frac{p}{2}$; fitque $\frac{p}{2} - x$, si x sit minor, quam $\frac{p}{2}$. In 1.° casu habetur $x - \frac{p}{4} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; in altero autem erit $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hi ergo sunt duo casus distincte expressi, qui duplici signo in formula generali *implicite* enuntiantur hoc modo $x - \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Si haberetur $xx + px = q$, per ratiocinationem praecedentem invenitur $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$, sola nempe radix positiva; tum vero inutilis est radix negativa, quum problematis solutionem non praebeat. Haec tamen radix haberetur quoque, mutata aequatione per regulas explicatas: prodiret nempe $xx - px = q$, et $\frac{p}{2} - x$, vel $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hac igitur methodo radices positivas necessarias a superfluis, veras a falsis separare liceret.

AEquationum quadraticarum doctrinam facili

exemplo illustrabimus. Itaque hoc sit problema, invenire scilicet in linea duo quaecumque luminaria coniungente, punctum tale, ut luminaria illa ex hoc puncto aequali luce fulgeant. Distantia inter duo luminaria dicatur a, sitque illuminationis ratio, ut m ad n. Praeterea dicatur x distantia minoris luminaris a puncto quaesito; erit distantia luminaris alterius ab eodem puncto $a-x$. Iam ponatur, luminarium effectus seu lucis intensitatem esse in ratione reciproca duplicata distantiarum a puncto lucido, ut vulgo statuitur a physicis. Sumtis distantiarum quadratis,

erunt intensitates lucis ut $\frac{1}{xx}$ et $\frac{1}{xx-2ax+aa}$.

Res ita se haberet, si aequalia forent luminaria. At quia (*ex hypoth.*) lucis quantitates absolutae sunt, ut m ad n; erunt luminarium effectus, ut $\frac{m}{xx}$ ad $\frac{n}{xx-2ax+aa}$. Itaque ut habeatur punctum quaesitum, instituenda est aequatio inter

$\frac{m}{xx}$ et $\frac{n}{xx-2ax+aa}$ ex qua per reductionum regulas eruitur $xx+\frac{2amx}{n-m}=\frac{aam}{n-m}$, et addito, ut moris est, dimidii coëfficientis quadrato, habe-

tur $x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{(n-m)^2} = \frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{(n-m)^2}$*. Huius aequationis radices duo sequenti formula exprimuntur, ut patet, nempe $x = -\frac{am}{n-m} + \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$,

vel $x = -\frac{am}{n-m} - \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$. Ex his evidens est, unius radicis valorem esse negativum, alterius autem positivum. Etenim si quantitas radicalis signo — adficiatur, iam quantitas tota fit negativa, si autem adficiatur signo positivo +, iam quantitas $-m + \sqrt{mn}$ erit positiva, quum sit (*ex hypoth.*) n maior quam m; ideoque $\sqrt{mn}$ maior quam m.

Superest, ut radicis negativae usum explicemus. In memoriam revocanda sunt, quae de quantitatibus negativis iam dicta sunt, scilicet quanti-

* *In gratiam tironum lubet intermedias operationes extricare*: $x + \frac{am}{n-m} = \pm\sqrt{\frac{am}{n-m} + \frac{a^2m^2}{(n-m)^2}}$

Hinc $x + \frac{am}{n-m} = \pm\sqrt{\frac{a^2nm - a^2m^2 + a^2m^2}{(n-m)^2}}$, *et*

per reductionem : $x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$.

tates negativas secundum directionem positivis oppositam sumendas esse. In praesenti problemate quantitatis x valor negativus facile intelligetur, si observemus, punctum quaesitum a nobis considerari tamquam inter duo luminaria constitutum. At si attendatur ad alterius casus possibilitatem, ponendo nempe punctum quaesitum in linea producta ultra luminaria, iam valor radicis prodit positivus. Et quidem si distantia puncti a minori luminari dicatur x, ut antea, erit luminaris maioris distantia $a + x$; quadrata autem distantiarum erunt xx, et $aa + 2ax + xx$, quae per conditiones problematis in aequationem reducta, praebent $maa + 2amx + mxx = nxx$, resoluta aequatione habetur $x = \frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{nm}$,

Valor $\frac{am}{n-m} + \frac{a}{n-m}\sqrt{nm}$, erit positivus, hicque solus problemati satisfaciet in casu proposito. Alter autem valor negativus $\frac{am}{n\,m} - \frac{a}{n-m}\sqrt{nm}$ significat, sumendam esse directionem oppositam, punctumque non in linea producta ultra luminaria, sed in ipsa linea iungente constituendum esse. Problema ad casum particularem transferamus. Ponatur $n = 4m$ et $m = 1$: praecedens formula $x = \frac{a}{n-m} \times (-m \pm \sqrt{mn})$ in hanc abiit

$x = \frac{a}{3} \times (-1 \pm 2)$. Quare duplex valor radicis x erit $+\frac{1}{3}a$ et $-a$, qui quidem duo valores determinant puncta duo, quae problemati aeque satisfaciunt. Punctum unum locatur inter duo luminaria, illiusque distantia a lumine vividiori duplo maior erit, quam a debiliori. Punctum alterum constituetur in linea producta, illiusque a lumine debiliori distantia aequalis erit ipsi luminarium distantiae. Facile autem sine ullo algebrae auxilio intelligitur, utrumque punctum problemati satisfacere; quum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora sint, quam vividiori, quae vim habent quadruplo maiorem. Hoc exemplo illustrantur, quae de quantitatibus negativis breviter antea attigimus. Haec sunt arithmeticae et algebrae elementa brevissima quidem, sed tamen rerum varietate copiosa, quantum ad nostras institutiones physicas satis esse iudicavimus.

FINIS ALGEBRAE.

ELEMENTA GEOMETRIAE.

PROOEMIVM.

De definitione et diviſione Geometriae.

DEFINITIO I.

Geometria eſt : ſcientia magnitudinum ; *ſolidorum* nempe , *ſuperficierum* et *linearum.*

Def. II. Solidum eſt : magnitudo in longum, latum et profundum extenſa.

Schol. Quamvis autem nihil ſit in rerum natura continuum , quod tres illas dimenſiones ſimul non habeat ; illae tamen ſeorſum conſiderari poſſunt , vel etiam duas tantum concipere poſſumus , de tertia minime cogitantes , atque hinc intelligitur notio ſuperficiei et lineae.

Def. III. Superficies eſt : magnitudo tantum in longum et latum extenſa. Linea autem eſt: magnitudo extenſa tantum in longum.

Schol. Et re quidem ipſa itineris longitudinem nobis repraeſentamus , non attenta eius latitudine: et planitiei latitudinem intelligimus , terrarum profunditatem nequaquam conſiderantes.

Def. IV. Denique si concipiamus lineae terminum, cuius nulla pars sit, nulla extensio, iam terminus ille *punctum* dicitur.

Schol. I. Itaque ad explicandam tironibus geometriae definitionem, id primum ostendi debet, quomodo per varios abstractionum gradus ex corporis *physici*, et, prout est in se, consideratione ad corporis *geometrici* et simpliciter extensi contemplationem perveniamus, ac deinde ad superficiei et lineae notionem progrediamur, atque tandem notionem puncti formemus. Neque methodo satis philosophica utuntur, qui statim superficiem definiunt terminum solidi, lineam terminum superficiei, et punctum terminum lineae.

Schol. II. Ex praecedenti definitione nascitur divisio geometriae in geometriam linearum, superficierum et solidorum. Quare tres erunt geometriae sectiones. I.ª De lineis. II.ª De superficiebus. III.ª De solidis. In prima sectione linearum positionem illarumque mutuam relationem expendemus. Porro linearum nomine non solum intelligimus lineam rectam, sed etiam lineam circularem, cuius utilitas est maxima in consideranda linearum rectarum mutua positione. Quare ad geometriae elementa pertinent quoque circuli proprietates. In secunda autem sectione superficierum proprietates et mensuram considerabimus. In tertia tandem sectione proprietates solidorum illorumque mensuram demonstrabimus. At recta methodus postulat, ut rerum demonstrandarum varietatem in unaquaque sectione variis capitibus distinguamus.

Def. v. Lineam repraesentare solent geometrae tamquam genitam motu puncti. Si punctum directionem non mutat, linea hoc motu descripta *recta* dicitur, uti AB; *curva* autem appellatur, si punctum perpetuo mutet directionem, uti OCQ. Fi[g.] 1.

Schol. At fatendum est, ita simplicem esse lineae rectae et curvae notionem, ut ad clariorem ideam magisque *elementarem* reduci vix possit. Rectam definiunt alii, lineam omnium inter duos terminos ductarum brevissimam.

Corol. I. Ceterum inde evidens est, datis in linea recta punctis duobus, datam esse huius lineae positionem ita, ut unica dumtaxat recta per haec duo puncta transire possit.

Corol. II. Ex his etiam intelligitur, quid sit superficies plana, scilicet omnium superficierum eosdem terminos habentium brevissima, vel cui linea recta undequaque adaptari potest.

Def. VI. *Circulus* definitur: figura plana CEGFOH, unica curva linea comprehensa, quae 2. *peripheria* dicitur sive *circumferentia* CGFOH, ad quam omnes rectas lineae a puncto medio E, quod *centrum* dicitur, ductae aequales sunt inter se.

Def. VII. Circumferentiae pars quaelibet CG *arcus* vocatur. Linea recta per centrum ducta, et utrinque in peripheria terminata RO *diameter* dicitur; rectae autem a centro ad circumferentiam ductae EF, EG *semidiametri* vel *radii* appellantur.

Def. VIII. Anguli notio ope circuli facillime concipitur. Duae lineae CE, RE in ali-

quo puncto P concurrentes, angulum efficere dicuntur. Angulorum mensura est arcus, quem ipsorum latera comprehendunt, in peripheria circuli ex anguli vertice, tamquam centro, descripti. Sic arcus CR est mensura anguli CER.

Schol. 1. Porro dum dicitur, anguli mensuram esse arcum circuli, nihil aliud significatur, nisi aequales esse angulos, si aequales sint arcus ex angulorum vertice et eodem radio descripti. Ita dum dicitur, angulum esse alterius duplum, nihil aliud intelligitur, nisi arcum unum altero esse duplo maiorem. Itaque anguli natura in maiori aut minori inclinatione unius lineae ad aliam consistit. Igitur angulus quum sit mera linearum inclinatio et apertura; extensio vel quantitas proprie loquendo dici non potest; ac proinde, abstractione facta ab omni extensionis consideratione, angulum alterius duplum dicere non possumus, quum id dici possit dumtaxat de quantitate, comparata cum alia quantitate homogenea. Quia vero mera linearum apertura partes non habet, angulus non est quantitas proprie dicta *.

* *Celeberrimae quaestioni sese interponit Auctor, quae inter magni nominis mathematicos Clavium et Peletarium exagitata est, ut aliam de natura anguli contactus resolverent. Sed Iacquierius Taequeto adsentiri videtur, aienti in sua adversum illos disquisitione, angulum non esse quantitatem, sed quantitatis modum. Nos vero, qui adolescentes ab omni cavillandi studio in physica alienos esse volumus, eos sedulo mone-*

Atque hinc factum est, ut anguli mensuram cum circuli arcu comparaverint geometrae.

Schol. II. Circulus dividi solet in partes aequales 360, quae *gradus* dicuntur; singuli gradus dividuntur in 60 minuta prima, quodlibet minutum primum dividitur in 60 secunda, et sic in infinitum. Gradus per o designari solent, minuta autem per lineolas numeris superimpositas. Ita si forte occurrant 45°, 25′, 36″, 42‴, lege

re debemus, ne in mathesim elementarem, quae non cavillationes modo, sed et quaestionum pruritum aversatur, praesentem quaestionem intrudant, quae, nondum satis elicuato calculo infinitesimali, scholasticisque nimio adhuc disputationum aestu ferventibus, mathematicos in varia traxit. Hoc unum, velim, animadvertant, angulum, ut veram accuratamque quantitatem a mathematicis tractari, idque satis superque esse, ut vera et genuina sit quantitas in geometria, qua talis scientia est. Quod si ideo quantitatem esse negandum est, quod non sit, nisi quantitatum seu linearum relatio aut inclinatio; pariter spatium quantitatem esse, negandum erit, quum nihil aliud illud sit, quam punctorum, linearum, superficierumve coëxsistentium mutua relatio. Ex eo autem, quod mensura anguli sit heterogenea, seu arcus ad radium suum relatus, concludi nequit, angulum non esse quantum, quemadmodum non infertur, celeritatem non esse veram quantitatem, etsi celeritatis mensura sit heterogenea, spatium nempe ad tempus relatum.

Fig. 45 gradus, 25 minuta prima, 36 secunda, 42 tertia.

Corol. Ex angulorum notione pendet linearum mutua positio.

8. *Def.* IX. Linea DA dicitur alteri lineae EB *perpendicularis*, quando in ipsam incidens facit angulos hinc et inde aequales DAE, DAB. Angulus eiusmodi dicitur *rectus*. At si recta una CA super alteram EB cadens duos angulos efficiat CAB, CAE, ita ut unus CAE sit recto maior, alter autem CAB minor; primus dicitur *obtusus*, alius autem *acutus*.

3. *Def.* X. Si talis sit rectarum BA, CD positio, ut eamdem semper a se invicem servent distantiam, evidens est, nullam esse linearum illarum mutuam inclinationem; ac proinde in infinitum etiam protractae non concurrent, seu angulum non efficient. Tales lineae dicuntur *parallelae*.

Corol. Ex lineae rectae definitione evidens est, duas lineas rectas in unico dumtaxat puncto concurrere posse. Quum enim omni careant latitudine, communis intersectio in unico tantum puncto fieri potest. Neque ad aliam deinde intersectionem transire possunt, alterutra enim linea directionem mutaret, ac proinde non forent ambae rectae, quod est contra hyp. Id pro axiomate habent geometrae, et ita exprimi solet: *Duae rectae nec segmentum commune habere, nec spatium claudere possunt.* Itaque tres saltem lineae requiruntur, ut spatium undique claudatur.

Def. XI. Spatium undique clausum *figura* dicitur.

9. *Triangulum* est: figura ABC terminata tribus

lineis AB, BC, CA, quae eiusdem latera vocantur. Fig.
Def. XII. Haec autem latera si fuerint aequa-
lia, uti AB, BC, CA, triangulum dicitur *aequi-* 17.
laterum. Si duo tantum latera sint aequalia, uti
AB, BC: triangulum vocatur *aequicrurum* seu 18.
isosceles. Demum si latera omnia fuerint inaequa-
lia, uti AB, BC, CA, triangulum *scalenum* dicitur. 9.

Def. XIII. Rursus autem triangulum ratione
angulorum considerari potest. Si unum habeat an-
gulum rectum, uti ACB, *rectangulum* dicitur. 15.
Acutangulum si omnes habeat angulos acutos, uti
ACB. Tandem *obtusangulum* vocatur, si angulum 17.
unum habuerit obtusum, uti ACB. 9.

Def. XIV. Figura quattuor lateribus terminata, *quadrilaterum* generatim appellatur. Appellatur autem in specie *parallelogrammum*, cuius bina opposita latera sunt mutuo parallela, etiamsi anguli lateribus comprehensi non sint recti.

Def. XV. Si parallelogrammum aequalia habue-
rit latera AB, BC, CD, DA, et ad angulos 11.
rectos iuncta, *quadratum* dicitur. At simpliciter
parallelogrammum rectangulum vocatur, si latera
duo opposita et aequalia AD, BC, duobus reli-
quis aequalibus item et oppositis BA, CD ma- 12.
iora sint, manentibus tamen angulis rectis.

Def. XVI. Si parallelogrammum sit aequilaterum, 13.
anguli tamen lateribus comprehensi non sint recti;
rhombus dicitur. At *rhomboides* vocatur, si la-
tera opposita AC, DB, atque AB, DC aequalia 14.
habuerit. Tandem quodlibet quadrilaterum ab iis,
quae iam enumeravimus, diversum ABCD, *tra-* 16.
pezium appellatur.

Fig. *Def.* XVII. Figura *polygona* dicitur, quae pluribus quam quattuor angulis constat, adeoque pluribus quam quattuor lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, dicitur *pentagonum*, uti
29. ADGIL.

Schol. Axiomata et postulata plurima praemittere solent geometrae, quae quidem nos omittimus. ¿Quae enim est axiomatum de toto et parte utilitas, ut intelligamus, dimidiam lineam tota minorem esse? ¿ Ecquis statim non videt, rectam lineam produci posse: circulum dato intervallo describi, et reliqua huiusmodi? Verum inter axiomata unum de figurarum *superimpositione* legitur, simplicissimum quidem et in universa geometria utilissimum, quod sine aliqua explicatione praetermittere nolumus. Dicunt nempe, *ea esse aequalia, quae sibi mutuo superimposita, perfecte congruunt.* Principium illud *superimpositionis* non ita crasse intelligendum est, quasi in mutua figurarum applicatione consisteret, non secus ac artifex mensuram aliquam datae longitudini applicat, ut inde veram longitudinem concludat: talis demonstrandi ratio minime foret geometrica. In eo positum est praedictum principium, ut figuram alteri impositam imaginemur, et deinde concludamus. I.° Ex partium datarum aequalitate ipsam earumdem partium convenientiam sive *coincidentiam*. . . . II.° Ex hac coincidentia ipsam reliquarum partium coincidentiam, ac proinde et perfectam duarum figurarum aequalitatem et similitudinem. Itaque *superimpositionis* principio intelligenda non est dumtaxat mu-

tua figurarum applicatio, sed partis unius alteri Fig. parti impositio, ut deinde figuras illas inter se comparemus. Vnde evidens est, idem valere principium ad demonstrandam figurarum inaequalitatem. Ceterum hoc unico principio cum angulorum mensura per arcus circulares coniuncto, demonstrari possunt propositiones omnes, quae ad elementarem linearum geometriam pertinent.

SECTIO I.

De geometria linearum.

CAPVT I.

De lineis rectis, quod ad mutuam positionem consideratis, nullum tamen spatium, seu nullam figuram terminantibus.

THEOREMA I.

RECTA QVAELIBET IN RECTAM CADENS, VEL DVOS ANGVLOS EFFICIT RECTOS, VEL DVOBVS RECTIS AEQVALES.

Etenim recta insistat perpendiculariter ut GE, 2.
vel oblique ut RE. In primo casu patet (*ex def.* IX.) angulos GEF, GEC esse rectos; in casu altero anguli duo CER, REF simul sumti aequales sunt duobus angulis CEF, GEF, hoc est duobus rectis.

Corol. I. Producta linea RE in O, simili ra-

tione patet, angulos FEO, OEC duobus rectis aequales esse, ac proinde duae rectae sese invicem secantes, efficiunt angulos hinc et inde quattuor rectis aequales. Iam ex centro E describatur circulus: mensura angulorum quattuor erit integra circuli circumferentia, hoc est 360.° Igitur angulus rectus erit quarta pars circumferentiae, nempe 90.°

Corol. II. Rectae GH, RO efficiunt angulos GER, HEO, qui dicuntur *ad verticem oppositi.* Illos autem angulos aequales esse, manifestum est. Quum enim sit dimidium peripheriae RFO aequale dimidio peripheriae GFH; sublata communi parte GO, erunt arcus reliqui GR, HO aequales inter se. *Adeoque et aequales erunt anguli* GER, HEO, *quos praedicti arcus metiuntur.*

Corol. III. Recta GE ad alteram CF perpendicularis est, si puncta duo quaelibet G, E a punctis duobus quibuslibet, ut C, F aequaliter distent, hoc est, si GC=GF et CE=EF. Etenim puncta duo E et G non magis inclinant versus C, quam versus F; ac proinde, quum duo puncta lineae rectae positionem determinent (*cor. I. def. V.*) aequalis est rectae totius GE hinc et inde ad rectam CF inclinatio, ideoque ob angulos utrinque aequales recta GE perpendicularis est ad CF. (*def. IX.*) Patet autem, puncta *c* et *f* sumi posse pro arbitrio inter E et F.

Corol. IV. Ex puncto quolibet E in recta CF dato erigi potest ad eamdem rectam perpendicularis EG. Etenim centro E, et dato quolibet aequali intervallo E*c*, E*f* describantur eodem ra-

dio arcus circuli sese invicem secantes in *g*: recta per *g* et E ducta, erit perpendicularis quaesita ob distantias *gc*, *gf* et E*c*, E*f* aequales.

Si punctum *h* extra rectam CF datum sit, simili ratione ducitur *ex puncto* h *ad rectam* CF perpendicularis *h*E. Etenim ex puncto *h tamquam centro, et ope intersectionum, seu arcuum aequali radio factorum* sumantur aequalia intervalla *hc*, *hf*, deinde ex punctis *c* et *f*, tamquam centris, et eodem intervallo describantur arcus circuli se mutuo secantes in *g*, ducaturque *hg*, haec erit perpendicularis ob aequales *hc*, *hf* et *gc*, *gf* distantias. Evidens autem est, in utroque casu unicam perpendicularem duci posse. Vnica enim est recta transiens per punctum E vel *h*, quae cum recta CF aequales hinc et inde efficiat angulos. Patet autem, lineam perpendicularem esse omnium, quae ex puncto dato ad lineam datam duci possunt, brevissimam; quum recta perpendicularis non magis propendat in unam partem quam in aliam: ac proinde neque ad dexteram declinet, neque ad sinistram, ideoque brevissima est via a puncto dato ad lineam datam. Item evidens est, ex puncto dato ad lineam datam unicam perpendicularem duci posse.

Eadem omnino est operatio, si recta *cf* in duas partes aequales dividenda proponatur. Ex punctis *c* et *f* tamquam centris, et eodem radio describantur arcus circuli, sese secantes in *g*. Deinde ex iisdem punctis, et sumto quolibet eodem intervallo describantur arcus se invicem secantes in *h*, recta *hg* dividet *cf* aequaliter in E, ut pa-

Fig. tet; quum singula puncta rectae *gh* aequaliter distent a punctis *c* et *f*: ac proinde E*c* = E*f*.

THEOREMA II.

3. SI LINEAE AB, DC SINT PARALLELAE, ERIT: I.° ANGVLVS OFD, QVI EXTERNVS DICITVR, AEQVALIS ANGVLO OGB, QVI INTERNVS ET OPPOSITVS VOCATVR: II.° AEQVALES ERVNT ANGVLI BGF, GFC, QVI DICVNTVR ALTERNI: III,° ANGVLI INTERNI, ET AD EAMDEM PARTEM POSITI DFG, FGB AEQVALES ERVNT DVOBVS RECTIS

Quum lineae parallelae eodem inter se ubique distent intervallo (*ex def. x.*), evidens est, eamdem fore parallelae utriusque BA, DC inclinationem ad rectam EO, ac proinde angulus OFD aequalis est angulo OGB : quod erat primum. Praeterea quum angulus GFC aequetur angulo DFO ad verticem opposito (*corol.II. theor. I.*); erunt etiam aequales anguli BGF, GFC : quod erat secundum. Tandem quum anguli OFD, GFD aequentur duobus rectis (*theor. I.*), aequales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB; quod erat tertium.

Versa vice si angulus externus OFD aequalis sit interno et opposito FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO; ac proinde rectae illae parallelae sunt inter se. Rursus si aequales sint anguli alterni BGF, GFC, vel si duobus rectis simul aequales sint interni ad eam-

dem partem positi BGF, GFD; angulus externus DFO semper aequalis erit angulo interno et opposito BGF; ac proinde rectae AB, CD erunt parallelae. Itaque ex ipsa parallelismi notione facile colliguntur tres primariae parallelarum adfectiones, necessario nexu inter se coniunctae ita, ut ex una qualibet inferre liceat, rectas illas esse parallelas. Porro in demonstrandis proprietatibus illis nimis laborare videntur quidam geometrae. Fig

Corol. I. Si duae rectae AB, HK parallelae sint eidem rectae CD, erunt etiam inter se parallelae. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO eadem erit, ac inclinatio rectae CD ad eamdem.

Corol. II. Si per datum punctum F ducere oporteat rectam CD parallelam rectae KH, ex quolibet huius puncto O ducatur recta GFO, et fiat angulus GFD aequalis angulo KOF: descriptis nempe ex punctis O, F, tamquam centris, et eodem radio arcubus aequalibus FM, GN, erit recta FD parallela ipsi KO.

CAPVT II.

De linearum rectarum respectu circuli positione.

THEOREMA I.

DVCTA RECTA FM, AD CIRCVMFERENTIAM VTRIMQVE TERMINATA, QVAE CHORDA DICITVR. RECTA EP EX CENTRO CIRCVLI AD 4.

CHORDAM PERPENDICVLARITER DVCTA, EAMDEM SECAT IN DVAS PARTES AEQVALES.

Quum enim recta EP e centro ducatur; punctum E aequaliter distat a punctis extremis chordae F et M (*ex def. VII. proem.*). Praeterea quum recta EP sit perpendicularis ad chordam, singula alia puncta aequalem habent ad iisdem extremis distantiam (*corol. III. theor. I. cap. I.*). Quare punctum P aequaliter etiam distat a punctis F et M; *adeoque in eo puncto chorda* FM *in duas aequales partes secatur.*

Et versa vice recta quaelibet EP per centrum transiens, et chordam FM aequaliter dividens, eam quoque perpendiculariter secat. Etenim quum recta EP chordam dividat aequaliter, punctum P aequaliter distat ab extremis F et M. Quia vero recta EP transit etiam per centrum; punctum E aequaliter distat ab extremis F et M. Quare puncta P et E aequaliter distant a punctis F et M, ac proinde EP perpendicularis est ad FM (*corol. III. theor. I. cap. I.*).

Rursus si recta EP perpendicularis sit ad chordam, eamque aequaliter dividat, recta illa transit per centrum. Quum enim chordam dividat aequaliter; punctum P aequaliter distat ab extremis F et M. Praeterea quum sit perpendicularis, singula illius puncta aequaliter etiam distant a punctis F et M. Erit ergo centrum E huius perpendicularis punctum aliquod.

THEOREMA II.

SI RECTA EH TRANSIENS PER CENTRVM DIVIDAT AEQVALITER CHORDAM FM, AEQVALITEA QVOQVE DIVIDET ARCVM FHM.

Etenim quum singula puncta rectae EH aequaliter distent a punctis F et M; aequalis erit puncti H ab extremis F et M distantia. Iam si semicirculus GMH semicirculo GFH imponatur, congruent *duo semicirculi, adeoque et semiperipheria* GMH *congruet cum semiperipheria* GFH, et punctum M cum puncto F, *igitur arcus* MH *aequalis erit arcui* FH. *Deinde* ob punctum H commune congruent et chordae HM, FH, *quae sunt punctorum F et M a puncto H distantiae.*

Corol I. In eodem circulo vel in circulis aequalibus, chordae aequales aequalibus arcubus respondent, inaequales autem, arcubus inaequalibus. Praeterea chordae aequales aequaliter distant a centro, chordae autem inaequales distant inaequaliter. Quod evidens est, ex *superimpositionis* principio. Nam chorda aequalis cum aequali chorda semper congruet, nec cum chorda inaequali congruere umquam poterit.

Corol. II. In eodem semicirculo vel in semicirculis aequalibus, quo maiores sunt vel minores arcus, eo maiores vel minores sunt chordae, et centro magis vel minus proximae. Vice versa quo maiores sunt vel minores chordae, et centro magis vel minus proximae, eo etiam maiores sunt vel minores arcus subtensi.

ig. *Corol. III.* Ducta chorda FM diametro AB parallela intercipit aequales arcus AF et BM. Etenim, ceteris manentibus ut antea, arcus AH = arcui BH, et arcus FH = arcui HM: quare demtis arcubus aequalibus, remanet AF = BM. Evidens est, eandem esse demonstrationem, si parallela NQ ad oppositas diametri partes iaceat, erit nempe arcus FN = arcui MQ.

Defin. Si ponatur, rectam NQ motu sibi semper parallelo a centro recedere, donec puncta duo N et Q coëant in G; chorda NQ abit in *tangentem*, quae nempe circulum in unico puncto tangit; evidens autem est, in hoc etiam casu esse GN = GQ. *Hoc est, chorda tangenti parallela intercipit arcus hinc et inde aequales.*

RPOBLEMA I.

10. EX COROLLARIIS PRAECEDENTIBVS PATET, QVA RATIONE PER TRIA DATA PVNCTA CIRCVLVS DESCRIBI POSSIT:

Dummodo tamen puncta illa in eadem recta non iaceant. Agantur rectae duae AB, BC, quae iungant tria puncta data A, B, C, hae erunt chordae circuli quaesiti. Quare ductis perpendicularibus DE, FG, quae chordas dividant aequaliter, utraque perpendicularis transit per centrum N; quod proinde erit in communi utriusque perpendicularis intersectione. *Itaque ex H tamquam centro, et distantia ex eo ad quodlibet datum punctum, tamquam radio, describatur circulus, qui per tria data puncta trans-*

ibit. Simili ratione, dato circuli arcu, centrum invenitur, totaque circumferentia describitur.

Corol. Hinc arcus circuli datus in duos aequales arcus dividi potest. Ducatur enim chorda, arcum datum subtendens, haecque aequaliter per rectam perpendicularem dividatur; eadem perpendicularis etiam angulum, quem arcus metitur, aequaliter in duas partes dividet.

Schol. Ex hoc corollario patet, facile dividi posse angulum quemlibet in partes 2, 4, 8, 16, 32, et ita deinceps, secundum terminos progressionis geometricae duplae. Sed per geometriam elementarem angulus in tres partes aequales dividi non potest. Atque haec est anguli *trisectio* a geometris per *circinum* et *regulam*, ut dicunt, hoc est, per lineae rectae et circuli constructionem frustra quaesita. Demonstrant enim geometrae, problema illud ad tertii gradus aequationem necessario pertinere, quae quidem aequationes per solum circulum construi non possunt. Neque ob eamdem rationem per sola geometriae elementa angulus dividi potest in partes 5, 6, 7, 9 cet. Talis enim divisio pro diverso partium aequalium numero ad altiores aequationum gradus adsurgit. Id autem, quamvis ad elementa non pertineat, breviter monuisse voluimus.

THEOREMA III.

RADIVS EG IN PVNCTO CONTACTVS G AD TANGENTEM RT PERPENDICVLARIS EST.

Etenim quoniam tangens circulum in unico

Fig. 4. puncto tangit (*ex def. ad theor. II.*), radius EG minima est tangentis a centro distantia, *quolibet enim aliud tangentis punctum extra circulum cadit, unde eius a centro* E *distantia maior erit quam radius, adeoque maior quam* EG. Proinde radius EG ad tangentem RT in puncto contactus G perpendicularis est (*corol. IV. theorema I. cap. I.*).

Versa vice recta RT perpendicularis ad extremitatem radii G circulum tangit in unico puncto G. Etenim quum sit EG minima rectae RT a centro E distantia, alia quaelibet puncta rectae RT magis distant a centro, quam punctum G; ergo singula puncta praeter G extra circumferentiam iacent, ac proinde recta RT tangens est.

Corol. I. Recta RT circumferentiam tangit in unico puncto, quam ex centro E ad rectam datam unica perpendicularis duci possit (*corol. IV. theor. I. cap. I.*).

Corol. II. Hinc facile ducitur tangens ad punctum datum G. Ducto scilicet radio EG, erectaque in G perpendiculari RT.

Corol. III. Ad punctum datum in circumferentia unica tangens duci potest (*loc. cit.*); ac proinde si per punctum contactus agatur recta quaelibet, haec coincidit cum tangente, vel circumferentiam secat.

Corol. IV. Si duo circuli GNA, GOQ eamdem habeant tangentem; recta HG eidem perpendicularis per utriusque centrum, puta E et P, transibit. Iam vero si ducatur ES, iungaturque PS, quae producta secabit in O circulum GOQ, et

in R tangentem RT ; erit semper in triangulo ESP latus PS minus duobus reliquis ES , EP (*ex def. lineae rectae*). Quare quum radii ES , EG aequales sint , erit recta PS minor quam PG , sive PO. Ergo quodlibet punctum S circuli GSF erit intra circulum GOQ ; ac propterea illi circuli se mutuo contingent in unico puncto G , in quo scilicet rectam RT tangunt.

Schol. Quum inter tangentem et circulum nulla duci possit linea recta , angulus , quem arcus circuli efficit cum tangente , minor est quolibet rectilineo , licet hic in infinitum minuatur. Huius propositionis utilitas est in physica , ubi agitur de divisibilitate in infinitum. Id vero maximam admirationem concertationesque maximas excitavit : nempe angulus contactus , quem facit arcus cum tangente , ab infinita circulorum serie in infinitas partes dividitur , licet ipse quovis angulo rectilineo minor sit. Huius autem paradoxi geometrici causam inde repetunt nonnulli , quod nempe anguli rectilinei natura diversa omnino sit a natura anguli curvilinei in puncto contactus. Etenim quemadmodum infinitae lineae numquam superficiem efficiunt , nec ulla inter has quantitates ratio potest adsignari , licet in partes infinitas dividi possint ; ita etiam infiniti anguli contactus quovis rectilineo minores sunt , licet sint divisibiles in infinitum. Verum in hac lite geometrica *logomachia* aliqua latere videtur. Si anguli nomine intelligatur portio finita spatii curva et tangente comprehensi ; nullum dubium est, quin spatium illud comparari possit cum portio-

ne finita spatii rectarum duarum concursu intercepti. At si anguli rectilinei notio vulgaris adhibeatur, evidens est, notionem illam absolute consideratam angulo contactus convenire non posse, quum in hoc angulo latus unum sit curvilineum. Itaque huius anguli adferri debet propria definitio, atque hac definitione, quae arbitraria omnino est, semel constituta et explicata, iam nihil difficultatis superesse potest. Et re quidem ipsa de solo nomine heic litigari, demonstrat summa geometrarum consensio circa anguli huius proprietates. Sed quidquid sit, quicumque geometricarum demonstrationum vim percipiet, pro evidenti habebit, angulum contactus, et minorem esse quovis rectilineo, et in infinitos curvilineos dividi posse *.

* *Quaestionem de natura anguli contactus, quam innuimus adnotatione in prooemio geom. fusiori calamo persequitur heic Auctor. Sed ne adolescentes in re, quae magni momenti est in physicae studio, logomachia laborent; amabo, sequentia perpendant. Circulus est linea curva, cuius proinde partes infinitesimae sunt rectae. Est proinde in circulo recta quaedam infinite parva cum tangente omni ex parte congruens: huic circuli lineolae proxima est alia cum priori ad angulum iuncta, quae proinde etiam angulum faciet cum tangente. Hic est igitur proprie angulus contactus, nempe, qui efformatur ab hac secunda lineola cum tangente: idem profecto exstiturus, si lineola isthaec protenderetur, us-*

Fig.

THEOREMA IV.

ANGVLVS BAD TANGENTE BA, ET CHORDA AD COMPREHENSVS HABET PRO MENSVRA DIMIDIVM ARCVM AFD. 5.

Etenim ducta per centrum C diametro EG chordae AD parallela, ductaque alia diametro *f*F eidem chordae perpendiculari; rectus erit angulus BAC tangente et radio comprehensus (*theor. praec.*), itemque rectus est angulus FCG, ac proinde utriusque anguli mensura est arcus FG. Sed angulus BAD=BAC–DAC, *ergo quum angulus* DAC.

que dum foret finita. Quapropter angulus contactus proprie rectilineus est, non vero a rectilineo natura diversus, ut aliqui contendunt. Porro angulus ille est infinitesimus, seu quod idem est, habet pro mensura arcum infinitesimum secundi ordinis divisum per radiolum seu lineolam infinitesimam primi ordinis. Si crus anguli infinitesimum in infinitum protendatur; angulus non variabit. Tunc autem erit illius mensura arcus infinitesimus primi ordinis, divisus per lineam seu radium finitum, atque ita deinceps eo pacto, ut arcus uno infinitorum ordine inferior sit radio suo. Ex his autem nullo negotio intelligitur, angulum contactus, quum minor sit quolibet finito, posse esse maiorem minoremve; quantitas enim infinitesima intra ordinem suum augmenti et decrementi capax est; etsi ipsa nulla sit, si cum finita comparetur.

Fig. *aequalis sit angulo* ACG *ob parallelas* AD, GE (theor. I. cap. I.) *erit etiam angulus* BAD=FCG —ACG=FCA. *Quare habebit pro mensura arcum* FA, *qui dimidius est integri arcus* AD (theor. II. cap. II.).

THEOREMA V.

6. **Angvlvs CAD ad circvmferentiam habet pro mensvra dimidivm arcvm CD lateribvs AC et AD intercеptvm.**

Etenim ex anguli vertice A ducatur tangens EB. Summa trium angulorum BAC+CAD+DAE=180° (*theor. I. cap. I.*) $=\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$CD + $\frac{1}{2}$DA. Sed angulum BAC metitur $\frac{1}{2}$AC, et angulum EAD metitur $\frac{1}{2}$ AD (*ex theor. praeced.*) ergo angulus CAD metietur etiam $\frac{1}{2}$ CD.

Corol. I. Angulus DFC ad centrum duplus est anguli DAC ad circumferentiam eodem arcu CD subtensi. *Etenim illius mensura dupla est, seu integer arcus* CD.

Corol. II. Angulus rectus, *cuius vertex est* in circumferentiam circuli, semicircumferentiam lateribus suis comprehendit, totaque diametro subtenditur. Angulus acutus arcum semicircumferentia minorem, obtusus autem maiorem intercipit: uterque chorda subtenditur. *Atque versa vice: angulus, cuius vertex est in circumferentia circuli, rectus est, si eius crura semicircumferentiam comprehendant, seu diametro subtendantur: acutus, si arcum semiperipheria minorem; et obtusus, si*

semicircumferentia maiorem comprehendant. Fig.

Corol. III. Angulus BAD vel intra vel extra 7.
circulum pro mensura habet $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ CE pro an- 19.
gulo intra circulum, vel $\frac{1}{2}$ BD − $\frac{1}{2}$ EC pro angulo extra illum. Per E agatur chorda EF rectae AD parallela; erit angulus BEF = BAD (ob parallelas). Sed mensura anguli BEF est $\frac{1}{2}$ BF, et $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ DF (*In angulo intra circulum* (fig. 7.) *et* $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD − $\frac{1}{2}$ DF, *in angulo extra circulum*) fig. 19.) et DF = CE (*cor. III. theor. II*). Ergo $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ CE. (*In angulo intra circulum*, *et* $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD − $\frac{1}{2}$ CE *in angulo, cuius vertex extra circulum cadat*).

Corol. IV. Angulus *b*AD tangente A*b* et se- 19.
cante AD interceptus = $\frac{1}{2}$ D*b* − $\frac{1}{2}$ *b*C. Si enim circa punctum A revolvi intelligatur recta AB, donec tangens evadat in *b*, puncta *b* et B convenient in *b*. Simili ratione angulus *d*A*b* inter duas tangentes A*d* et A*b* comprehensus pro mensura habet $\frac{1}{2}$ *d*F*b* − $\frac{1}{2}$ *d*C*b*. *Itaque eadem omnino demonstratio in his casibus locum tenet, quae in corollario praecedenti.*

CAPVT III.

De lineis rectis, quae spatium claudunt, seu de figurarum rectilinearum proprietatibus.

THEOREMA I.

IN TRIANGVLO QVOLIBET SVMMA TRIVM ANGVLORVM AEQVALIS EST DVOBVS RECTIS.

Fig. 10. Etenim per tres angulorum vertices describatur circulus ABC (*probl. I. cap. II.*), triangulum erit inscriptum circulo, cuius chordae erunt tria latera AB, BC, CA. Anguli autem habent pro mensura dimidium arcum lateribus oppositis subtensum (*theor. V. cap. II.*) Quare trium angulorum summa aequalis est dimidiae trium arcuum summae, hoc est, dimidiae circumferentiae, seu 180°.

Corol. I. In triangulo unicus esse potest angulus rectus vel obtusus, reliqui duo sunt acuti. Quare in triangulo rectangulo angulus acutus est *complementum* alterius *acuti* ad rectum.

Corol. II. Datis duobus angulis in triangulo, datur et tertius, qui est differentia inter datam duorum angulorum summam, et 180°. Si autem unicus datus sit angulus, data est reliquorum duorum summa, quae est *complementum* ad duos rectos, et *supplementum* simpliciter appellari solet. *Complementum enim proprie dicitur ad unum rectum.*

15. *Corol. III.* In triangulo quolibet ABC producto latere CB in I, angulus externus ABI aequalis est duobus angulis internis oppositis ACB, CAB. Etenim summa anguli externi ABI, et interni contigui ABC aequalis est duobus rectis (*theor. I. cap. I.*); sed summa trium angulorum ACB, CAB, ABC aequalis etiam est duobus rectis; ergo angulus externus ABI aequalis est duobus internis oppositis ACB, et CAB, demto scilicet communi angulo ABC.

Fig.

THEOREMA II.

In omni triangulo maius latus opponitur maiori angulo, minus autem minori: et vice versa angulus maior maiori lateri, et minor minori opponitur.

Triangulum circulo inscribatur, maiorem angulum metitur arcus maior, et maiorem arcum subtendit maior chorda, et contra (*probl. I. cap. I.*).

Corol. I. In triangulo aequilatero singuli anguli aequales sunt inter se, et vice versa si tres anguli sunt aequales inter se, triangulum est aequilaterum. Inscripto enim, ut antea, triangulo in
circulo, tria latera aequalia AB, BC, CA sunt 10.
tres aequales circuli chordae, quae proinde tres arcus aequales subtendent, ideoque et tres anguli aequales sunt (*theor. V. cap. II.*). Evidens autem est, unumquemque angulum esse tertiam partem 180°, hoc est, 60°.

Corol. II. In triangulo isoscele aequales sunt anguli lateribus aequalibus oppositi *seu anguli ad basim*; et contra si duo anguli *ad basim* in triangulo aequales sunt, triangulum est isosceles. Patet, ut in corol. praec.

THEOREMA III.

Si in duobus triangulis tria latera aequalia sint, tota triangula erunt aequalia.

Sit AB = *ab*, AC = *ac*, BC = *bc*. Ex 17.

punctis A et B tamquam centris, describantur arcus FCG, DCE se invicem secantes in C. Triangulum *abc* ita imponatur triangulo ABC, ut punctum A conveniat cum *a*, punctum *b* cadet etiam in B, ob AB=*ab*, et ob *ac*=AC, recta *ac* terminabitur in aliquo puncto arcus FCG. Similiter ob *bc*=BC, recta *bc* terminabitur in aliquo puncto arcus DCE. Quia vero rectae *ac*, *bc in unico puncto coniungi debent, punctum istud necessario esse debet illud, quod sit utrique arcui commune, ac proinde* utraque terminabitur in puncto intersectionis C. Ergo *ac* congruet cum AC, *bc* cum BC totumque triangulum *abc* cum triangulo ABC.

Corol. I. Si sit angulus A = *a*, B = *b*, C=*c* et latus AB=*ab*; erit triangulum ABC = triangulo *abc*. Latus *ab* imponatur lateri AB; ob angulum *a* = A, et *b* = B, cadet latus *ac* in latus AC: et latus *bc* in latus BC; quare latera duo *ac* et AC, *bc* et BC in eodem puncto iungentur, hoc est, *c* cadet in C, totumque triangulum *abc* congruet cum triangulo ABC, *ac proinde aequalia erunt.* Latera duo *ac* et AC, *atque etiam bc et* BC, quae *opponuntur* angulis aequalibus *b* et B, *c* et C dicuntur *homologa.* Quare aequalia sunt triangula duo, si anguli unius aequales sint angulis alterius; et praeterea si triangula latus unum aequale habeant.

Corol. II. Si duo triangula latera duo habuerint aequalia, et agulum his lateribus interceptum aequalem, tota triangula erunt aequalia. Sit AC = *ac*, AB = *ab*, et angulus A = *a*. Im-

ponatur latus AB lateri *ab*, et latus AC lateri Fig.
ac: ob angulum A et *a* aequalem, latera illa congruent. Praeterea quum ſit AC = *ac*, et AB = *ab*, punctum *c* cadet in C, et *b* in B; ac proinde *bc* congruet cum BC; *quum inter duo puncta aequaliter diſtantia non niſi unica et eadem linea cadere poſſit.*

THEOREMA IV.

Si duo triangula inaequalia aequales habent angulos, ponaturque angulus unus ſupra alterum aequalem angulum, itemque ſibi mutuo imponantur duo latera homologa *, erit tertium latus tertio lateri parallelum.

Ponatur angulus D ſupra angulum aequalem B, 18.
latus DF ſupra latus homologum BC, et latus DE ſupra latus BA itidem homologum; erit latus FE, vel *fe* parallelum lateri AC. Quum enim angulus *fe*B aequalis ſit angulo CAB, erit recta *fe* rectae AC parallela (*theor. II. cap. I.*). Si angu-

* *Latera homologa in triangulis dicuntur, quae aequalibus angulis ad ſe invicem opponuntur, ſive ea fuerint aequalia ſive inaequalia. Et univerſim dimenſiones homologae in figuris appellantur eae, quae ſunt eiuſdem denominationis, ſeu quae in cunctis eodem modo generantur. E.g. in circulo radii, diametri, circumferentiae, arcus eorumdem graduum, eorumque chordae.*

Fig. lus F poneretur supra angulum aequalem C ; simili modo demonstratur ; rectam DE esse rectae AB parallelam. Idem dicendum de rectis FD et BC.

Vice versa si per punctum *f* pro arbitrio sumtum in latere trianguli agatur recta *fe* parallelae rectae AC, aequales sunt anguli B*fe*, BCA et B*ef*, BAC (*loc. cit.*).

Definit. Triangula illa, quae angulos habent respective aequales, dicuntur *similia.*

THEOREMA V.

28. QVODLIBET POLIGONVM ABDEFGA RESOLVI POTEST IN TOT TRIANGVLA, QVOT SVNT POLIGONI LATERA.

Etenim ex puncto C intra polygonum ad singulos angulos duci possunt rectae. Evidens autem est, tot esse triangula ABC, BCD, DCE, ECF, FCG, GCA, quot polygoni latera, AB, BD, DE, EF, CF, FA.

30. Alia ratione in triangula dividi possunt polygona : si nempe ex polygoni angulis A, C, D, atque F, H, I, ducantur tot rectae AC, AD vel FH, FI, quot duci possunt, quae tamen se mutuo non secent. Illae autem rectae, quae ab angulo polygoni ad alium ducuntur, *diagonales* vocantur. Patet, in hoc casu tot esse triangula, quot latera polygoni, demtis duobus.

Corol. 1. Summa angulorum polygoni aequalis est producto ex 180°. in numerum laterum,

demtis 360°. Etenim anguli polygoni simul sumti Fig.
aequales sunt angulis omnibus triangulorum, in quae reductum est polygonum, demtis angulis, quorum vertex est in C. Sed tot sunt 28.
triangula, quot latera; quare summa omnium 29.
angulorum polygoni aequalis est producto ex 180° in numerum laterum. *At vero anguli efformati circa centrum ad polygonum non pertinent. Est autem illorum summa* 360°. (theorem I. cap. V.). *Quare ex priori summa haec subtrahi debet.* Ita si polygonum habuerit septem latera, summa angulorum est $= 180° \times 7 - 360° = 900°$.

Idem omnino valor angulorum polygoni eruitur; si polygonum per diagonales in triangula 30.
dividatur. Erit nempe praedicta summa aequalis producto 180° *in numerum laterum, demtis duobus. Etenim polygonum per diagonales in tot triangula resolvitur, quot sunt latera, demtis duobus. Quare summa illa aequalis erit producto ex* 180° *in numerum triangulorum, hoc est, in numerum laterum polygoni, demtis, duobus. Ita summa angulorum heptagoni erit*

$$= 180° \times \overline{7 - 2} = 180° \times 5 = 900°.$$

Corol. II. Polygonum quodlibet regulare circulo inscribi potest. Dividantur in duas partes
aequales anguli polygoni per rectas AC, BC, DC, 28.
EC cet. rectae illae se mutuo secabunt in C, et erunt inter se aequales. Etenim rectae AC et BC sibi occurrentes in puncto aliquo C, efficiunt triangulum ACB; itemque rectae BC et DC aliud

Fig. efformant triangulum BCD. Sed triangula illa sunt aequalia : nam quum anguli polygoni regularis aequales sint, et bifariam aequaliter dividantur, aequales sunt anguli CAB, CBA inter se, et angulis CBD, CDB. Praeterea aequalia sunt latera AB, BD; ergo isoscelia sunt, et aequalia triangula ACB; BCD (*corol. II. theor. III.*). Quare AC = DC = BC; et propter latus commune BC punctum intersectionis C rectarum AC, BC cadet in punctum intersectionis C rectarum BC, DC. Idem valet de aliis rectis EC, FC. *Quare punctum commune intersectionis omnium linearum aequaliter distat a punctis* A, B, D, E, F, G; *adeoque ex eo puncto describi potest circulus, qui per alia omnia pertranseat. Punctum illud dicitur centrum polygoni.*

Corol. III. Radii e centro polygoni regularis ad angulos ducti, polygonum dividunt in tot
28. triangula isoscelia et aequalia, quot sunt polygoni latera; et quodlibet polygoni latus fit chorda arcus, qui aequalis est quoto ex 360° per nu-
29. merum laterum divisis. Ita latus decagoni est arcus $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

28. *Corol. IV.* Latus hexagoni regularis ABDEFG circulo inscripti aequale est circuli radio. Nam si ex centro C in sex triangula dividatur hexagonum *erit angulus* ACB = 60°, *adeoque summa duorum reliquorum* ABC, CAB = 120° (theor. I. cap. III.). *At vero triangula illa sunt isoscelia* (cor. praec.) *ac proinde anguli* ABC, CAB *aequa-*

les ſunt (corol. II. theor. II. cap. III.). *Igitur* Fig.
quilibet angulus $= \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$. *Quare ſinguli anguli ſunt* 60°, *et triangula ſunt aequilatera* (corol. I. theor. II. cap. III.) *ac proinde* CA = AB.

Corol. V. Quodlibet polygonum regulare circulo circumſcribi poteſt, hoc eſt, intra polygonum regulare deſcribi poteſt circulus, qui ſingula tangat polygoni latera. Etenim quum latera polygoni regularis circulo inſcripti totidem ſint chordae aequales, chordae illae a centro aequaliter diſtant (*cor. I. theor. II. cap. II.*). Quare ſi ex centro C agantur perpendiculares CI, CK, 28.
hae chordas aequaliter divident, atque aequales erunt. Ergo per ſingulas perpendicularum extremitates deſcribi poterit circulus, qui ſingula polygoni latera in puncto medio tanget (*corol. I. theor. III. cap. II.*).

Corol. VI. Hinc polygono regulari dato circulus circumſcribi poteſt. Quaeratur polygoni centrum (*coroll. II.*): quo invento, circulus facile circumſcribitur. Item polygono regulari circulus facile inſcribitur invento polygoni centro: ad latus aliquod demittatur perpendicularis, haec erit circuli radius.

Verſa vice polygonum regulare circulo dato circumſcribi poteſt. Dividantur 360° per duplum numerum laterum polygoni, ſumtoque arcu *iK*, 28.
qui ſit quoto aequalis, per extremitates K et *i* ducantur radii CK et C*i*, agaturque recta indeterminata CB: ad punctum K erigatur perpen-

dicularis DKB, occurrens CB in puncto B: transferatur KB in KD; erit BD latus polygoni quaesiti. Simili modo inveniuntur alia latera. Vel etiam radio CB describatur circulus, et per totam circumferentiam transferatur chorda DB, atque inscribatur polygonum DBAGFE, quod erit circulo dato circumscriptum, ut patet; quum per constructionem tot habeantur tangentes aequales, et aequaliter divisae in puncto contactus, quot sunt latera in polygono quaesito.

Simili constructione, circulo dato polygonum regulare inscribitur. Dividatur numerus 360° per numerum laterum polygoni quaesiti: sumatur in circulo dato arcus huic quoto aequalis: chorda huius arcus erit latus polygoni: transferatur chorda illa per totam circumferentiam, habebitur polygonum quaesitum.

Heic autem diligenter observandum est, per geometriam elementarem circulo inscribi posse dumtaxat ttiangulum aequilaterum, quadratum, pentagonum, pentedecagonum, hoc est, figuram quindecim laterum, et polygona regularia, in quibus numerus laterum se habet ad praedicta in progressione geometrica dupla. Ita triangulum aequilaterum praebet polygona regularia laterum 6, 12, 24, 48 cet. quadratum praebet polygona laterum 8, 16, 32, 64 cet. Ex pentagono oriuntur polygona laterum 10, 20, 40, 80 cet. Tandem ex pentedecagono oriuntur polygona laterum 30, 60, 120, 240 cet. Alia polygona, ut heptagonum, enneagonum, endecagonum cet. describi non possunt geometrice, nisi per constructio-

nem aequationum, quae ad sublimiorem gradum adsurgunt.

Schol. Quum polygonum regulare circulo inscribi et circunscribi possit, quo maior est in polygono inscripto vel circumscripto laterum numerus, eo magis polygonum ad circulum accedit. Itaque augeatur numerus laterum polygoni in infinitum ita, ut differentia inter polygonum et circulum sit data quavis differentia minor, iam circulus considerari potest tamquam polygonum regulare, ex lateribus numero infinitis et infinite parvis compositum. Haec circuli consideratio pendet ex principio omnino evidenti. Si nempe duarum quantitatum A et B differentia sit qualibet adsignabili minor, quantitates illae velut aequales haberi debent. Etenim ponatur inter illas quantitates differentia aliqua data, iam quantitatum illarum differentia non est qualibet adsignabili minor, quod est contra hyp. Quantitas autem, quae ad aliam accedit pro differentia qualibet data minori, huius alterius quantitatis limes appellatur. Methodus autem illa vocatur methodus *exhaustionum*, seu *primarum* et *ultimarum* rationum. Hanc methodum, quam fusius explicabimus in prima parte physices, ubi sermo erit de extensionis divisibilitate, in proximo capite, quantum hactenus nobis satis est, breviter exponemus.

CAPVT IV.

De linearum ratione, seu de lineis proportionalibus.

THEOREMA I.

21. In trianguvlis similibvs *acb*, ACB latera homologa svnt proportionalia.

Ponatur *ab* pars dimidiae rectae AB; nempe sit A*b* aequalis rectae *ab*, agaturque *cb* parallela CB, et *cg* parallela rectae AB; erit *cg* = *b*A. Quod evidens est ex linearum parallelismo. Ducta enim linea *bg*, erit ob angulos inter parallelas aequales, et ob latus commune *bg*, triangulum *bcg* aequale triangulo *bg*B, et latus *cg* = *b*B (*cor. 1. theor. III. cap. praec.*). Ergo *cg*=*b*B=A*b*. Praeterea triangulum C*cg* aequale est triangulo *c*A*b* (*loc. cit.*). Ergo C*c* = A*c*, et C*g* = *cb* = *g*B. Quare A*c*, vel C*c* erit pars dimidia rectae AC, sicut *cb* est pars dimidia rectae CB. *Erit igitur* *ac* : AC = *ab* : AB.

22. Si *ab* sit tertia vel quarta, aut quaelibet alia pars rectae AB, simili modo evidens est, rectas *ac* et *cb* esse tertiam, quartam cet. partem rectarum AC, CB. Etenim ex divisionum punctis *b*, *f* in recta AB ducantur *bc*, *fh* cet. rectae BC parallelae, et eadem ratiocinatione patet, triangula A*cb*, *chg*, *h*C*i* cet. aequalia esse *inter se, adeoque et aequalia triangulo acb. Igitur latus*

Ac=ch=hC, *atque etiam latus* Ab=bf=fBc; *si igitur in triangulo abc latus ab sit tertia vel quarta, vel quaelibet pars lateris* AB, *etiam ac erit tertia vel quarta cet. pars lateris* AC. *Proindeque erit ab*: AB=*ac* : AC.

Si recta *ab* accurate non contineatur in AB, sed cum fractione aliqua, e. g. bis cum dimidio; simili ratione *ac* bis cum dimidio continebitur in AC, et *bc* in BC. Etenim factis duobus triangulis A*cb*, *chg* aequalibus triangulo *acb*, inter parallelas *hf* et CB construi poterit triangulum *h*C*i*, cuius latera erunt dimidia pars laterum trianguli *c*A*b*; quod est evidens, quum sit *f*B pars dimidia rectae A*b* (*per hyp.*), et recta *ih* aequalis rectae *f*B ob parallelas *hf* et CB. *Et generatim triangula quaelibet similia habent latera homologa proportionalia.*

Corol. Si in triangulo ACB *ducantur parallelae ad basim hi, cm; numerus partium interceptarum a linea hi in lateribus* AC, CB, *erit; ut quilibet alius numerus partium inter duas parallelas hi, cm interceptarum, atque numerus partium erit etiam, ut latera trianguli. Hoc est* : C*h* : C*i*=*hc* : *im*=CA : CB. *Etenim* (ex demonstr.) C*h* : C*i*=*hc* : *im*=*c*A : *m*B. *Ergo* (§. v. cap. IV. arith. et alg.) C*h* + *hc* + *c*A : C*h* =C*i* + *im* +*m*B : C*i*=*hc* : *im*. *Seu quod idem est* CA: CB=C*h* : C*i*=*hc* : *im*. *Quare* CA *est ad* CB, *ut numerus quilibet partium intercepterum in* CA *ad numerum interceptarum partium in* CB.

THEOREMA II.

DVO TRIANGVLA, IN QVIBVS LATERA SVNT PROPORTIONALIA, AEQVIANGVLA SVNT.

18. Si ponatur AC : CB = EF : FD, et AC : AB = EF : ED, aequiangula erunt triangula ABC et EDF. Nam super EF construatur triangulum FGE triangulo ABC aequiangulum; facto scilicet angulo GEF = BAC, et angulo GFE = ACB, erit etiam tertius EGF aequalis ABC; indeque erit AC : BC = FE : FG: sed (*per hypoth.*) AC: BC = FE: FD; ac proinde FD = FG. Similiter ob triangula ABC, FGE similia, erit AC : AB = FE : EG : sed (*ex hyp.*) AC : AB = FE: ED, ergo FE : EG = FE : ED; ac proinde EG = ED. Quare triangula duo FED et FEG aequiangula sunt et aequalia, ob latus commune FE, ut latera FD, FG, et EG, ED aequalia (*theor. III. cap. praeced.*). Sed (*per constr.*) triangulum FGE triangulo ABC est aequiangulum; ergo triangulum FED ipsi quoque est aequiangulum.

Corol. 1. Si in triangulis ABC et EDF sit angulus D = B, et praeterea DE: DF = BA: BC: erit triangulum EDF triangulo ABC aequiangulum. Nam super AB capiatur B*e* = DE, ducaturque *ec* parallela rectae AC; triangula ABC et *e*B*c* sunt aequiangula, quum ob parallelam *ec* angulus *ce*B = A, *ec*B = C, et ob angulum B communem. Ergo B*e*: B*c* = BA: BC Sed (*ex hyp.*) DE : DF = BA : BC, ergo B*e* : B*c* = DE; DF,

at *Be* = DE : ergo *Bc* = DF. Ac proinde Fig. duo triangula *Bec* ; DEF sunt aequalia et similia. Sed *Bec* est triangulo BAC aequiangulum, ergo triangulum EDF est aquiangulum triangulo ABC ; ac proinde generatim triangula, quorum latera duo circa aequalem angulum sunt proportionalia, sunt aequiangula.

Corol. II. Si recta AD angulum BAC bifariam 23.
et aequaliter dividat in triangulo BAC, eadem recta latus oppositum BC dividit quoque in duas partes BD et DC lateribus AB et AC proportionales. Etenim producta recta CA in E, per punctum B agatur BE rectae AD parallela : triangula ECB, DAC erunt similia (*def. ad theor.* IV. *cap. III.*) ac proinde BD : DC = AE : AC (*corolar. ad theor. I.*) sed ob parallelas angulus BEA = DAC = DAB = ABE ; ergo triangulum BAE est isosceles (*cor. II. theor. II. cap. praeced.*): quare AE = AB: ideoque BD : DC = AB, AC.

Corol. III. Si ex angulo recto A trianguli rectanguli BAC demittatur perpendicularis AD in basim BC, quae angulo recto imminet ; et *hypothenusa* dicitur : haec dividet triangulum in duo alia triangula BAD, DAC inter se, et triangulo BAC similia. Et quidem triangula BAD, DAC, praeter angulum rectum habent quoque cum triangulo BAC angulum communem, *scilicet triangulum* ABD *angulum* B, *et triangulum* ADC *angulum* C. Ac proinde similia sunt inter se, et toti triangulo (*def. ad theor. IV. cap. III.*). Hinc BD : DA = DA : DC et BD : BA = BA : BC, ac tandem DC : CA = CA : CB.

Fig. *Corol. IV.* Dum fit $BD : BA = BA : BC$, erit $BA^2 = BD \times BC$ (ob productum mediorum aequale producto extremorum). Similiter quum sit $DC : AC = AC : CB$, erit $AC^2 = DC \times BC$. Ergo $BA^2 + AC^2 = BD \times BC + DC \times BC = \overline{BD + DC} \times BC = BC \times BC = BC^2$. Quare quadratum hypothenusae in triangulo rectangulo aequale est quadratis laterum, seu cathetorum.

Corol. V. Diagonalis quadrati est lateri *incommensurabilis*. Quum enim diagonalis sit hypothenusa trianguli rectanguli, cuius latera sunt aequalia, quadratum diagonalis aequale est duplo quadrato lateris. Sed numeris exprimi non potest radix quadrati dupli, seu radix 2 (*ex demonstratis in arithmetica*). Ergo si latus quadrati numeris exprimatur, exprimi non poterit diagonalis, et contra *.

24. *Corol. VI.* Perpendicularis EO ex circumferentiae circuli puncto quolibet in diametrum demissa, est media proportionalis inter duo segmenta CO et OL. Nam si ex puncto E ad diametri extremitates agantur rectae EC, EL; triangulum CEL est rectangulum in E, ac proinde (*corol. II.*) $CO : EO = EO : OL$; et $EO^2 = CO$

* *Conferantur, quae in arithmetica de incommensurabilibus dicta sunt, et observabitur auxilium, quod geometria praestat arithmeticae in exhibendis veris quantitatibus, quas, utpote surdas seu irrationales, haec numquam exprimere valet.*

OL. Recta perpendicularis EO, dici solet *ordinata*; *abscissa* autem vocatur pars CO diametri inter perpendicularem et circumferentiam comprehensa.

THEOREMA III.

SI DVCANTVR IN CIRCVLO CHORDAE DVAE BC 26
ET DA, SE MVTVO SECANTES IN E, CHORDARVM SEGMENTA ERVNT RECIPROCE PROPORTIONALIA.

Si enim ducantur BA et CD, triangula BEA et DEC sunt similia, ob angulos in E aequales, atque ob angulos C, A, et B; D iisdem arcubus subtensos. Quare AE ; BE=CE : DE (*theor. 1.*).

Corol I. Si duae lineae EB, EC ex eodem 25
puncto extra circulum ductae, ad superficiem concavam terminentur, partes externae EA, ED rectis integris EB, EC sunt reciproce proportionales. Ductis enim chordis AC, DB, triangula EBD; EAC similia sunt ob angulum E communem, et angulos B, C eodem arcu AD subtensos; ergo EA : ED = EC : EB (*theor. 1.*).

Corol. II. Si recta EB sit secans, altera autem E*d* tangens; erit EB : E*d* = E*d* : EA. Nam ductis *d*B, *d*A, similia erunt triangula E*d*B, E*d*A ob angulum E communem, et angulos EB*d*, A*d*E aequales, quorum communis mensura est dimidius arcus A*d* (*theor. IV. cap. II.*). Ergo angulus *d*AE = E*d*B, ac proinde EB : E*d*=E*d* : EA, hoc est tangens est media proportionalis inter

ig. rectam totam EB, ea partem externam EA.

Corol. III. Hinc facile dividitur recta data bifariam, ea conditione, ut maior pars sit media proportionalis inter totam rectam, et eiusdem re-
27. ctae partem alteram. Nam super datae rectae AB extremitatem erigatur perpendicularis AE dimidiae AB aequalis, et centro E, radio AE describatur circulus DAF. Deinde per B et E agatur recta BF, et centro B, radio BD describatur arcus DC; hic occurret rectae AC in puncto quaesito. Etenim ob tangentem BA erit BF : BA = BA : BD, ac proinde BF — BA : BA = BA — BD : BD (§. *v. cap. VI. alg.*). Sed BF — BA = BD = BC, quum sit FD = BA, utpote duplae ipsius EA, quae est dimidia rectae AB. Simili modo BA — BD = AC; ergo substitutione facta, BC, BA = AC ; BC, vel BA : BC = BC : AC. In hoc corollario continetur problema, quod his verbis proponere solent geometrae: *rectam dividere in media et extrema ratione.*

Alia etiam problemata proponi solent, qualia sunt: *tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire. Inter duas rectas, invenire mediam proportionalem.* Sed haec manifesta sunt ex praecedentibus

THEOREMA IV.

SI DVAE FIGVRAE SIMILES IN TRIANGVLA VTCVMQVE DIVIDANTVR PER DIAGONALES EX VERTICE ANGVLORVM AEQVALIVM DVCTAS, TRIANGVLA HOMOLOGA ERVNT SIMILIA.

Etenim sint duo polygona ABCDE et FGHIK, Fig. 30.
in quibus angulus A = F, B = G, C = H
D = I, E = K, sitque praeterea AB : FG = BC : GH = CD: HI = DE : IK = EA : KF. Ductis diagonalibus AC, AD, FH, FI; similia erunt triangula ABC, FGH, et ACD, FHI, atque ADE, FIK. Nam quum anguli B et G, E et K aequales sint, et lateribus proportionalibus comprehensi, similia erunt triangula ABC, FGH, et ADE, FIK (*Corol. I. theor. II. cap. IV.*). Itaque angulus BAC = GFH, DAE = IFK. Ergo BAE—BAC—DAE = CAD = GFK — GFH — IFK = HFI. Igitur angulus CAD = angulo HFI. Simili modo ostenditur, angulos ACD, FHI, et ADC, FIH aequales esse. Quare triangula ACD et FHI sunt aequiangula.

Versa vice duae figurae quaelibet similes sunt, si in triangula aequiangula resolvi possint. Nam ob angulos aequales in triangulis aequiangulis aequales sunt anguli in unaquaque figura. Quare quum latera figurarum sint triangulorum aequiangulorum latera proportionalia, figurae similes sunt.

Corol. IV. Si dividatur BC in C, latusque homologum GH in M in eadem ratione, ita ut sit BC : GH = LC : MH, deinde si ducantur rectae duae ad arbitrium LN et MO, quae angulos GLN, HMO aequales efficiant, vel quae dividant latera homologa ED et KI in eadem ratione, ita ut sit ED : KI = DN : IO : erit LN : MO = CD : HI = BC : GH cet. Nam ductis NC et OH, triangula NCD, OHI similia sunt ob angulos D, I aequales, lateribus proportionalibus NC, DC, et

OI, IH comprehensos. Quare CD: HI = CN: HO, et angulus DCN = IHO. Si ergo anguli illi auferantur ex angulis aequalibus DCL, IHM, remanebunt aequales anguli NCL, OHM; ac proinde triangula NCL, OHM similia sunt: ideoque LN : MO = LC : MH = BC: GH = CD : HI cct. Quare generatim si in duobus polygonis similibus ducantur lineae, quae dividant latera homologa vel angulos aequales in eadem ratione, lineae illae erunt proportionales inter se, atque etiam eorumdem polygonorum lateribus quibuscumque homologis.

Schol. Linearum rationem iam consideravimus in quantitatibus finitis. Superest, ut pauca, quantum nobis necesse est, explicemus de ratione quantitatum: quas *infinite magnas* et *infinite parvas* appellant. Et in primis quidem observandum est, nullam quantitatem in se spectatam, et sine nostro cogitandi modo aut infinite parvam esse, aut infinite magnam, sed magnitudo quaelibet in se determinata est. Et quidem data quovis magnitudine, utcumque parva vel utcumque magna, alia semper minor in primo casu, et alia semper maior in casu altero haberi potest. Nobis enim licet quantitatem exiguam vel ingentem considerare, primamque minuere, alteram augere, abstrahendo animum a quovis limite determinato. Priorem quantitatem dicimus *infinitesimam* vel *infinite parvam*; quantitatem alteram appellamus *infinitam* vel *infinite magnam*. Rationem, quam duae quantitates finitae habent ad se invicem, *rationem finitam* vocamus. Patet antem, diversos

esse infinitorum et infinitesimorum ordines. Licet enim magnitudo aliqua concipiatur infinita vel infinitesima; semper tamen quantitas manet, ac proinde ultra quoscumque limites augeri potest et minui. Si quantitatem aliquam finitam ultra quoscumque limites minui concipiamus, hanc dicimus infinitesimam *ordinis primi*. Si autem quantitas alia ad hanc infinitesimam habeat rationem, quam ipsa infinitesima habet ad quantitatem finitam, dicimus infinitesimam *secundi ordinis*, et ita deinceps. Vice versa, si quaedam quantitas sit ad finitam quantitatem, ut quantitas finita ad infinitesimam ordinis primi, eam dicimus infinitam *ordinis primi*; et ita deinceps superiores infinitorum ordines intelligere licet. Exemplum sit in circulo, cuius diameter est ad chordam, ut est chorda ipsa ad abscissam, ac proinde si fingatùr chorda infinite parva primi ordinis, erit abscissa infinitesima ordinis secundi.

Ex his patet, calculo subiici posse quantitates infinitas et infinitesimas. Infinitum hac nota exprimi solet ∞. Quare numerorum series infinita hoc modo repraesentari potest 0, 1, 2, 3, 4, 5. . . . ∞. Pari modo quantitas quaelibet finita concipi potest divisa in partes perpetuo decrescentes, donec perveniatur ad quantitatem infinitesimam. Talis est series, $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$.

Evidens autem est, quantitatem infinitam finitae quantitatis additione vel subtractione maiorem vel minorem non fieri; quum finita quantitas ad quan-

titatem infinitam rationem habeat qualibet data minorem. Simili ratione quantitas infinite parva quantitatem finitam augere vel minuere non potest. Itaque $\infty = \infty \pm 1$, et $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$. Eodem modo si diversi infinitorum ordines per diversos exponentes designantur, erit $\infty^2 \pm a = \infty^2$, et $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Verum si quantitates eiusdem generis considerentur sive infinitae sive infinitesimae, ex notione quantitatum illarum manifestum est, eas non secus ac quantitates finitas tractari debere. Probe enim recordandum est, quantitates illas non absolute, sed relative dumtaxat et secundum nostrum concipiendi modum esse infinitas vel infinitesimas. Quare $\infty + \infty = 2\infty$; $\frac{1}{\infty}$

$$\times 3\infty = \frac{3\infty}{\infty} = 3 ; \frac{2\infty^2}{\infty} : \frac{2}{\infty} = \infty \times \infty = \infty^2$$

$$\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty ; \frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty} ; \frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2} ; \frac{1}{\infty} :$$

$$\frac{1}{\infty^2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty.$$

Ex his multa colligere licet.

Quantitates infinitae vel infinitesimae eiusdem ordinis adduntur vel subtrahuntur non secus, ac vulgares quantitates. Quantitas infinita primi ordinis per quantitatem infinitam eiusdem ordinis multiplicata producit quantitatem infinitam ordi-

nis secundi. At quantitas infinita ordinis cuiuscumque per quantitatem finitam multiplicata producit quantitatem infinitam eiusdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cuiusvis ordinis per aliam quantitatem ordinis cuiuscumque multiplicata evehitur ad illum infiniti gradum, cuius exponens est ipsa exponentium summa. Contraria autem ratione, si quantitas infinita ordinis cuiuscumque per quantitatem infinitam ordinis cuiuslibet dividatur, habetur quantitas, cuius gradus designatur per ipsam exponentium differentiam. At si quantitas infinitesima cuiuslibet gradus per quantitatem infinitesimam ordinis cuiuscumque multiplicetur aut dividatur; in primo casu quantitas infinitesima ad eum deprimetur gradum, qui per exponentium summam exhibetur: in casu autem altero quantitas infinitesima ad eum gradum evehitur, qui per ipsam exponentium differentiam repraesentatur ita, ut quantitas infinitesima per divisionem fieri possit finita, atque etiam infinita. Haec pauca dicta sint *de primarum et ultimarum rationum* methodo, quam quidem ad methodum *exhaustionum* revocari posse intelligitur.

APPENDIX.

De proportionum usu in triangulorum resolutione, sive de Trigonometria.

Ex linearum proportione tota pendet *trigonometria*, quae est ars resolvendi triangula. In trian-

Fig. gulo autem sex partes considerari possunt, nempe tres anguli, et tria latera. Huc autem refertur trigonometriae praxis, ut datis tribus ex sex partibus trianguli, *quarum saltem una latus sit*, partes reliquae inveniantur: ac proinde tres partes datae constituere debent tres primos proportionis terminos, et terminus quartus erit pars quaesita. Verum quia latera trianguli expressam rationem non habent cum angulis, quorum mensura sunt arcus circuli; angulis vel arcubus circuli substituuntur lineae rectae, quae arcus illos exhibeant, et trianguli lateribus proportionales sint. Harum linearum definitiones adferemus, et proprietates demonstrabimus.

31. *Def. I.* Sit angulus quilibet ACB, ex cuius vertice C, tamquam centro, et radio ad arbitrium sumto describatur circulus AH*a*G. Producatur AC in *a*, erigaturque in C perpendicularis CH. Evidens est, angulum BCH vel arcum HB esse *complementum* anguli ACB vel arcus AB. Angulus BC*a* vel arcus BH*a* est *supplementum* anguli ACB vel arcus AB, et vice versa BA est *complementum* ipsius HB, et *supplementum* ipsius *a*HB.

Def. II. Recta BD ex radii extremitate B ad radium CA perpendiculariter ducta dicitur *sinus* arcus AB vel anguli ACB.

Def. III. Recta AE ex radii extremitate A perpendiculariter ducta, et radio alteri producto occurrens in E, vocatur *tangens* arcus AB; recta autem CE eiusdem arcus *secans* appellatur.

Def. IV. Pars AD radii inter arcum et sinum comprehensa, dicitur *sinus versus* arcus AB. Per-

perpendicularis BI dicitur *sinus complementi* arcus AB. Perpendicularis HK *tangens complementi*, et HI *sinus versus complementi* arcus AB.

Schol. Compendii ergo sinus complementi, tangens complementi cet. dicuntur *cosinus*, *cotangens*, *cosecans*, *cosinus versus*. Brevitatis causa scribuntur R pro radio : sin. pro sinu : tang. pro tangente : sin. v. pro sinu verso.

Corol. I. Ex his definitionibus multa colliguntur. Nempe sinus, cosinus, tangens, cotangens cet. anguli obtusi BCa sunt etiam sinus, cosinus cet. anguli acuti ACB, qui est anguli obtusi supplementum. Nam ex radii alterutrius extremitatibus B vel a demitti non potest perpendicularis, quae non cadat in radium alterum productum. Tales sunt perpendiculares DB, ad. Similiter tangens alia esse non potest quam ae; sed ob triangula aCd, BCD, et Cae, CAE aequalia habetur $ad =$ BD, et $ae =$ AE. *Ergo sinus et tangentes sunt aequales in angulis acutis atque in obtusis, qui sint illorum supplementa.* Quum autem sit arcus BH complementum arcus AB, evidens est, BI esse cosinum arcus AB, et HK illius cotangentem.

Corolar. II. Sinus BD arcus AB est dimidium chordae BG, arcum duplum BAG subtendentis (*theorem. I. cap. II.*). Sinus crescunt crescentibus angulis a 0° usque ad 90°, et eodem modo decrescunt a 90° usque ad 180°.

Corol. III. Sinus arcus 30° dimidio radio aequalis est. Est enim radius aequalis chordae arcus 60° (*corol. IV. theor. V. cap. III.*), et eius-

dem arcus sinus est dimidia chorda arcus dupli. Itaque in triangulo rectangulo latus oppositum angulo 30° est dimidia hypothenusa huius trianguli. Nam si ACB = 30°, erit BG = BC, et BD = $\frac{1}{2}$ BC.

Corol. IV. Tangentes crescunt, crescentibus angulis a 0° usque ad 90° ita, ut tangens arcus 90° sit infinita. Nam radius CH in angulo recto HCA non potest concurrere cum tangente, *quum tangens et radius* CH *sint eidem radio* CA *perpendiculares, adeoque inter se parallelae.*

Corol. V. Tangens arcus 45° aequalis est radio. Nam si angulus ACB sit 45°, triangulum rectangulum CAE erit isosceles, et AE = AC.

Corol. VI. Sinus versus AD arcus AB, qui minor est 90°, aequalis est differentiae inter radium CA et cosinum CD = BI. Praeterea cosinus versus HI est differentia inter radium CH et sinum CI = BD; at sinus versus supplementi, nempe D*a* aequalis est summae radii et cosinus.

Corolar. VII. Ob triangula rectangula similia CDB, CAE, CIB, CHK, erit CA : CD vel BI = AE : BD, nempe radius est ad cosinum, ut tangens ad sinum, hoc est, R : cos. = tang. : sin. Deinde haec alia habetur analogia CH : CI, vel BD = HK : IB, hoc est, radius ad sinum, ut cotangens ad cosinum, seu R : sin. = cot. : cos. Tandem AE : CA = CH, vel CA: HK; hoc est, tangens ad radium, ut radius ad cotangentem, seu tang. : R = R : cot.

Corol. VIII. Ex praecedentibus analogiis derivant formulae, quarum ope sinus substituuntur

tangentibus, et vice versa. Sit $R = 1$; erit $\text{sin.} = \text{cos.} \times \text{tang.} = \frac{\text{cos.}}{\text{cot.}}$; $\text{cos.} = \text{sin.} \times \text{cot.} = \frac{\text{sin.}}{\text{tang.}}$; $\text{tang.} = \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}} = \frac{1}{\text{cot.}}$; $\text{cot.} = \frac{\text{cos.}}{\text{sin.}} = \frac{1}{\text{tang.}}$; $\text{cot.}\, A \times \text{tang.}\, A = 1 = \text{cot.}\, B \times \text{tang.} B$.

THEOREMA I.

In omni triangvlo sinvs angvlorvm svnt, vt latera angvlis opposita.

Etenim triangulum circulo inscribatur: singula latera sunt chordae arcus dupli, qui est mensura anguli oppositi. Quare dimidium latus est sinus anguli oppositi. Sed semisses sunt inter se, ut tota; ergo latera sunt, ut sinus angulorum oppositorum.

Corol. I. Hinc quum sinus anguli recti sit radius, et latus oppositum sit hypothenusa, erit in triangulo rectangulo radius ad hypothenusam, ut sinus anguli unius acuti ad latus eidem angulo oppositum.

Corol. II. In triangulo rectangulo cosinus anguli unius acuti est sinus anguli alterius, ergo sinus anguli unius acuti est ad suum cosinum, ut latus huic angulo oppositum est ad latus alterum; sed sinus est ad cosinum, ut tangens ad

Fig. radium ; ergo in triangulo rectangulo tangens anguli unius acuti est ad radium , ut latus huic angulo acuto oppositum est ad latus alterum.

THEOREMA II.

32. In triangvlo qvolibet ABC haec semper habetvr analogia : maivs latvs AC est ad svmmam dvorvm aliorvm latervm AB + BC , vt eorvmdem latervm differentia AB — BC ad differentiam segmentorvm AE et CE , qvae fivnt dvcta ex angvlo maiori B in maivs latvs AC perpendicvlari BE.

Nam si ex anguli vertice B tamquam centro, et radio BC , qui sit minori lateri aequalis , describatur circulus GCO , producto latere AB in G ; erit AG = AB + BC , et AP = AB — BC; atque ob CE = EO , erit EA — CE = AD. *Iam triangula* ACG *et* AOP *sunt similia. Habent nempe communem angulum* A: *praeterea angulus* GCO *aequalis est angulo* OPA ; *nam angulus* GPO + OPA = 180° = ½ CPGC ; *sed angulus* GPO = ½ GDE ; *ergo angulus* OPA = ½ GPD. *At vero haec eadem est mensura anguli* GCO (theor. v. cap. II.) : *proinde erunt anguli* OPA, GCO *aequales. Igitur triangula* ACG , AOP *sunt similia* , *et latera homologa proportionalia:* AC : AG = AP : AD , *seu* AC : AB + BC = AB — BC : EA — CE.

PROBLEMA I.

Fig. 33.

DATO SINV ET COSINV ARCVS, INVENIRE SINVS ET COSINVS ARCVS DIMIDII, ATQVE ETIAM ARCVS DVPLI.

Sit AM arcus datus, cuius sinus MP, et cosinus CP dati sint: ducta chorda AM, et ad eam demissa perpendiculari CQN, erit AQ vel MQ sinus, et CQ cosinus dimidii arcus. Praeterea agatur chorda MB, quae erit dupla CQ ob triangula ACQ, ABM similia, atque ob AB duplam ipsius AC. Sed AP : AM = AM : AB. Quare $AM^2 = AB \times AP$, et $AM = \sqrt{AB \times AP}$. Ideoque MQ sinus dimidii arcus $= \frac{1}{2}\sqrt{AB \times AP} = \sqrt{\frac{1}{2} AB \times AP} = \sqrt{\frac{1}{2} AC \times AP}$. Simili modo quum sit AB : BM = BM : BP, erit $BM^2 = AB \times BP$, et $BM = \sqrt{AB \times BP}$, ergo CQ vel cosinus dimidii arcus $= \frac{1}{2}\sqrt{AB \times BP} = \sqrt{\frac{1}{2} AB \times BP} = \sqrt{\frac{1}{2} AC \times BP}$.

Iam vero si invenire oporteat sinum et cosinum arcus dupli, sit AN arcus simplex, cuius sinus AQ vel MQ, et cosinus CQ; erit MP sinus, et CP cosinus arcus dupli. Sed ob triangula rectangula AQC, AMP similia, erit CA: CQ = AM: MP. Quare si radius dicatur R, et arcus AN dicatur A, erit R : cos. A = 2 sin. A: sin. 2A. Tandem ob eorumdem triangulorum similitudinem erit CA : AQ = AM : AP, vel

Fig. $R : \sin. A = 2 \sin. A : R - \cos. 2A$: ideoque $RR - R \times \cos. 2A = 2 \sin. A \times \sin. A$. Ac proinde

$$\cos. 2A = \frac{RR - 2 \sin. A \times \sin. A}{R}.$$

PROBLEMA II.

Dato sinv et cosinv dvorvm arcvvm, invenire sinvs et cosinvs eorvmdem svmmae vel eorvm differentiae.

Sint arcus AM, DM, quorum sinus et cosinus dati.

34. Agatur chorda FD ad radium CM perpendicularis, et ex punctis D, F demittantur perpendiculares DQ, FP ad radium CA, quarum linearum una erit sinus summae, altera autem sinus differentiae arcuum AM, DM, ideoque recta CQ erit cosinus summae, et CP cosinus differentiae. Iam vero ducantur rectae GK, FL perpendiculares ad DQ, itemque rectae MN, GI perpendiculares ad radium CA, fiatque arcus $AM = A$, et arcus DM, vel $FM = B$. His positis, patet, sinum DQ summae arcuum esse $= QK + DK = GI + DK$, et sinum FP differentiae eorumdem arcuum esse $= GI - KL = GI - DK$, quum sit $DK = KL$. Quare inveniendae sunt duae illae rectae. Sed ob triangula CMN, CGI similia, erit $CM : CG = MN : GI$,

vel $R : \cos. B = \sin. A : GI = \frac{\sin. A \times \cos. B.}{R}$

Item ob triangula CMN, DGK similia, erit $CM : CN = DG : DK$, vel $R : \cos. A = \sin. B : DK$

Fig.

$= \frac{\text{sin. B} \times \text{cos. A}}{R}$, factaque summa, erit DQ, vel

$\text{sin. }(A+B) = \frac{\text{sin. A} \times \text{cos. B} + \text{sin. B} \times \text{cos. A}}{R}$. Factaque subtractione, erit GI — DH, vel FP =

$\text{sin. }(A-B) = \frac{\text{sin. A} \times \text{cos. B} - \text{sin. B} \times \text{cos. A}}{R}$.

PROBLEMA III.

Simili modo invenire cosinvm CQ svmmae, et cosinvm CP differentiae arcvvm. 34.

Inveniantur nempe rectae CI, et GK = PI, subtrahanturque ex CI, vel huic addantur. Iam vero ob triangula CMN, CGI similia, erit CM:CG = CN : CI, vel R : cos. B = cos. A:CI $= \frac{\text{cos. A} \times \text{cos. B}}{R}$. Itemque ob triangula DGK, CMN similia, erit CM : MN = DG : GK $= \frac{\text{sin. A} \times \text{sin. B}}{R}$. Ideoque CQ, vel cos. (A + B) $= \frac{\text{cos. A} \times \text{cos. B} - \text{sin. A} \times \text{sin. B}}{R}$, et CP, vel

$\text{cos. }(A-B) = \frac{\text{cos. A} \times \text{cos. B} + \text{sin. A} \times \text{sin. B}}{R}$.

Fig. 34. Sit arcus AM = 30°, et FM = MD. Ob triangula rectangula similia DGO, LSO, erit angulus GDO = LSO = ACM = 30°. Ergo angulus GDO = 30°. Quare FL = $\frac{1}{2}$ FD (*cor. III.*) = FG = GD. Sed $DF^2 = FL^2 + DL^2$, vel $DF^2 - FL^2 = DL^2$, vel $4FG^2 - FG^2 = DL^2$. Ergo $3FG^2 = DL^2$, vel $FG^2 \times 3 = DL^2$. Quare $FG \times \sqrt{3} = DL$, et $FG \times \sqrt{3} + FP = DQ$, hoc est, sinus FP arcus FA minoris scilicet quam 30°, et sinus FG, differentiae scilicet inter hunc arcum et 30° per $\sqrt{3}$ multiplicatus, simul sunt aequales sinui DQ arcus DA, qui tanto maior est arcu 30°, quanto arcus FA minor est. Ob arcum DG = FL, erit DT + DG = FH. Nempe sinus DT arcus DB minoris quam 60°, et sinus DG, differentiae scilicet inter hunc arcum et 60°, simul aequantur sinui FH arcus BF, qui tanto maior est arcu 60°, quanto FD minor est. Itaque demonstravimus principia, quorum ope formari possunt sinuum et tangentium tabulae. Illae autem tabulae commoditatis ergo per logarithmos construuntur, cuius quidem constructionis ratio ex logarithmorum doctrina iam explicata intelligitur.

LEMMA.

SI AD SEMISVMMAM DVARVM QVANTITATVM ADDATVR SEMIDIFFERENTIA, PRODIT NVMERVS MAIOR; SI VERO HAEC AB ILLA SVBTRAHATVR, RELINQVITVR NVMERVS MINOR.

Etenim numerus maior componitur ex minore

et differentia ; ergo summa componitur ex minore bis sumto et differentia. Quare quum semisumma componatur ex minore et semidifferentia, prodit numerus maior, si ad semisummam semidifferentia addatur ; contra relinquitur minor, si haec ab illa subtrahatur. Fig.

THEOREMA III.

IN OMNI TRIANGVLO ABC SVMMA DVORVM LATERVM QVORVMCVMQVE AB + BC EST AD ILLORVM DIFFERENTIAM AB — BC, VT TANGENS SEMISVMMAE DVORVM ANGVLORVM A, ET C, QVI HIS LATERIBVS OPPONVNTVR, AD TANGENTEM SEMIDIFFERENTIAE EORVMDEM ANGVLORVM. 32.

Etenim sit P semisumma angulorum A et C, et Q illorum semidifferentia. Erit angulus maior $C = P + Q$, et minor $A = P - Q$. (*lemmate praec.*). Iam (*ex demonst.*) $AB : BC = \sin. C : \sin. A = \sin. (C+Q) : \sin. (C-Q) = \sin. P \times \cos. Q + \cos. P \times \sin. Q : \sin. P \times \cos. Q - \cos. P \times \sin. Q$ (*probl. 11.*) Radius ponitur $= 1$. Ergo $AB \times \sin. P \times \cos. Q - AB \times \cos. P \times \sin. Q = BC \times \sin. P \times \cos. Q + BC \times \cos. P \times \sin. Q$. Et (*per transpositionem*) - - - $\overline{AB-BC} \times \sin. P \times \cos. Q = \overline{AB+BC} \times \cos. P \times \sin. Q$. Quare dividendo per $\cos. P. \times \cos. Q.$, factaque reductione, habebitur : $\dfrac{\overline{AB-BC} \times \sin. P}{\cos. P} = \dfrac{\overline{AB+BC} \times \sin. Q}{\cos. Q}$.

Sed $\frac{\text{sin.}}{\text{cos.}} = \text{tang.}$ Ergo $AB - BC \times$ tang. $P = - -$ $AB + BC \times$ tang. Q. Quare $AB + BC : AB - BC = \text{tang. } P : \text{tang. } Q = \text{tang. } \frac{A+C}{2} : \text{tang. } \frac{A-C}{2}$.

His principiis universa innititur trigonometria. Et quidem in triangulorum resolutione vel dantur tria latera, vel duo tantum et angulus, vel duo anguli et latus unum. Porro datis in triangulo tribus, quae iam diximus, reliqua inveniuntur per hactenus demonstrata. At monendum est, datis tribus angulis dumtaxat, inveniri tantum rationem laterum, quae sunt, ut sinus angulorum oppositorum; minime autem invenitur eorum valor, quum infinita possint construi triangula similia inaequalia. Neque etiam sine observatione praetermittendus est casus, in quo dantur duo latera, et angulus alterutri lateri oppositus. Casus ille est ambiguus, et duas solutiones potest admittere; quum (*ex dem.*) sinus anguli acuti sit quoque sinus complementi ad duos rectos. Quare, ut tollatur ambiguitas, nota sit, oportet, anguli species, hoc est, notum esse debet, an angulus sit acutus vel obtusus.

In omnibus trigonometriae libris reperiuntur sinuum et tangentium tabulae. Quamvis autem ex hactenus demonstratis manifestum sit, quo artificio construantur; id tamen breviter declarabimus. Dato sinu 30° per antea demonstrata, inveniri possunt sinus 15°, deinde $7^\circ\frac{1}{7}$, postea $2^\circ\frac{1}{4}$,

et ita sinuum semisses, progrediendo usque ad duodecimam operationem, nempe usque ad $52.''\ 44.'''\ 3''''\frac{3}{4}$; qui quidem sinus sine errore sensibilii cum arcu confunditur. Quia vero sinus illi minime sunt arcubus proportionales, dici potest: ut arcus ille minimus est ad suum sinum: ita arcus $1'$ est ad suum sinum. Dato autem sinu $1'$, invenietur sinus arcuum $2'$, $3'$, $4'$ cet. et ita deinceps usque ad 30°. Tandem a 30° usque ad 60°, et a 60° usque ad 90° progredi licebit. Quo facto tangentes ad calculum revocare iam facile erit. Fig.

SECTIO II.

De Geometria superficierum.

CAPVT I.

De praecipuis planarum superficierum proprietatibus.

THEOREMA I.

TRIA PVNCTA, QVAE IN EADEM RECTA NON IACENT, PLANI POSITIONEM DETERMINANT.

Id patet ex definitione ipsius plani, *quae sic se habet: si concipiatur triangulum rectangulum* ABF *circa perpendicularem im-* 35.

Fig. *mobilem* AB *ita in gyrum agi, ut revolutione sua transitus vestigia relinquat; ea exsistent in plano circulari* CDGFLH. *Non ita vestigia lineae obliquae* AF, *quae superficiem concavam designabunt.* Illud vero planum unicum esse, manifestum est. *Fingantur enim in-*
36. *finita numero plana, uti* HD, CG *cet. Possunt utique ea plana habere duo puncta* A, B *inter se communia. Sed illud etiam manifestum est, unicum dumtaxat inter ea esse, quod quum transeat per duo praedicta puncta, possit simul transire per aliud determinatum punctum* C. *Igitur tria puncta, quum non possint esse, nisi eidem plano communia, ipsius positionem determinant.*

36. *Corol. I.* Duae rectae CA, AD se invicem secantes sunt in eodem plano PQ. Nam punctum intersectionis A, et punctum quodlibet aliud in binis lineis pro arbitrio sumtum C, D, tria sunt puncta in directum non posita, quae proinde determinant positionem plani CAD, in quo iacent duo utriusque lineae puncta, ac proinde et totae binae lineae (*ex def.*).

Corol. II. Si duae rectae iacentes in eodem plano tertia recta secentur, recta secans in eodem quoque iacebit plano. Nam duo eiusdem lineae secantis puncta, duae scilicet intersectiones, sunt in eodem plano, *quum sint communia aliis duobus lineis.* Si autem ponamus, duas rectas se mutuo secare, patet, in hoc casu demonstrationem non valere, nisi tertia linea secans extra punctum intersectionis transeat; alioquin unicum haberetur,

punctum, quod rectae positionem non determinat. Fig.

Corol. III. Duorum planorum CG, DH intersectio est linea AB, cuius singula puncta iacent in utroque plano. *Quum enim plana nullam crassitudinem habere censeantur, apertum est, eorum intersectionem* AB *unicam dumtaxat dimensionem habere posse, scilicet longitudinem, adeoque lineam rectam.* Quare planorum duorum CG, DH, intersectio est linea recta AB. 36.

Corol. IV. Recta AB ad planum perpendicularis, insistit quoque perpendiculariter ad rectas singulas in eodem plano iacentes, et per extremitatem perpendicularis transeuntes FB, GB, DB, CB, HB, LB. Etenim ponamus, rectam illam ad planum perpendicularem, non insistere perpendiculariter ad aliquam ex praedictis lineis; iam linea illa infra planum deprimitur vel attollitur supra idem planum; ac proinde non iaceret in eodem plano (*quod est contra hypoth.*). 35.

Corol. V. Duae rectae AB, MN ad idem planum perpendiculares vel aequaliter inclinatae, sunt inter se parallelae, et contra. Etenim rectarum illarum extremitates communi recta BN in plano iungantur; duae illae lineae ad planum perpendiculares vel aequaliter inclinatae, erunt quoque perpendiculares, vel aequaliter inclinatae ad eamdem lineam iungentem BN; est enim in eodem plano. Quare (*ex parallelarum def.*) rectae illae erunt parallelae, et vice versa. 35.

Fig.

THEOREMA II.

Dvo plana sibi mvtvo inclinata easdem habent proprietates, qvas de rectis ad se invicem inclinatis demonstravimvs.

36. *Ponamus, duo plana* DH *et* CG *se invicem intersecare iuxta rectam* AB. *Ducatur in plano* CG *linea* CA *perpendicularis ad* AB, *atque in plano* DH *ducatur etiam* AD *perpendicularis ad* AB; *tunc angulus* CAD *erit mensura inclinationis planorum* CG, HD. *Vnde constat, eodem pacto haberi mensuram planorum ad se invicem inclinatorum, atque linearum rectarum. Vnde prono alveo fluunt sequentia:*

Corol. I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit, vel duobus rectis aequales (*theor. I. cap. I. sect. I.*).

Corol. II. In planorum intersectione aequales sunt anguli ad verticem oppositi (*corol. II. theorem.* I. *cap. I. sect. I.*).

Corol. III. Si plana quotlibet eamdem habeant communem intersectionem, summa angulorum omnium est 360° (*corol. I. theor. I. cap. I. sect. I.*).

Corol. IV. Ex puncto dato extra planum vel intra planum, unica perpendicularis ad planum duci potest (*corol. IV. theor. I. cap. I. sect. I.*).

Corol. V. Distantia puncti alicuius a plano dato, est perpendicularis ex puncto dato ad planum ducta (*ex def.*).

Corol. VI. Planum secans duo vel plura pla-

na parallela efficit angulos alternos externos aequales: item aequales angulos alternos internos. Fig.
Praeterea angulus internus alterius interni supplementum est, atque etiam angulus externus est supplementum alterius (*theor. II. cap. I. sec. I.*).

Corol. VII. Si duo aut plura plana parallela alio plano secentur, communes intersectiones erunt parallelae. Si enim non sint parallelae, sibi occurrere possunt, ac proinde et plana ipsa, in quibus hae lineae iacent, ideoque plana non forent parallela, quod est contra hypoth.

CAPVT II.

De superficierum mensura.

THEOREMA I.

SVPERFICIES PARALLELOGRAMMI RECTANGVLI AEQVALIS EST PRODVCTO EX BASI IN ALTITVDINEM.

Sit parallelogrammum rectangulum ABCD, 37.
cuius altitudo AD certum contineat pedum numerum: e. g. 7; basis autem AB contineat 8. Divisum intelligi poterit parallelogrammum in 7 superficies, ut DM, quae singulae continent octo minores superficies quadratas, sive octo pedes *quadratos*, ut vocant. Quare habebitur parallelogrammi totius superficies, si octo pedes quadrati, qui prima superficie continentur, toties sumantur, quod sunt aequales superficies, ut DM,

Fig. *at vero* DM *continet* 7 *pedes* ; ac proinde superficies tota parallelogrammi erit 7×8, nempe 56 pedum quadratorum. Evidens est, in hac demonstratione fingi posse alium quemlibet partium numerum, atque eadem valet demonstratio, etiamsi altitudo et basis parallelogrammi ponantur *mixtae ex integro et fractione*, ut patet ex *theor. I cap. IV.*

Corol. I. Si parallelogrammum BD per diagonalem DB dividatur, habebuntur triangula duo rectangula aequalia ABD, BDC, quorum proinde superficies, utpote dimidia parallelogrammi, erit dimidium productum ex basi in altitudinem.

Eadem est demonstratio pro triangulo quolibet, etiam non rectangulo. Sit enim triangulum
38. CAB non rectangulum. Ex puncto A demittatur perpendicularis AD, compleaturque rectangulum FCBE : erit triangulum CAD dimidium rectanguli FACD, et triangulum DAB dimidium rectanguli DABE: ac proinde $CAB = CDA + ADB = \frac{1}{2} CFAD + \frac{1}{2} AEBD = \frac{1}{2} FCBE = \frac{1}{2} CB \times AD$. Quare, ut antea, superficies trianguli est dimidium productum ex basi in altitudinem.

Idem patet, etiamsi perpendicularis EB trianguli CED cadat extra basim. Nam triangulum DEB est dimidium rectanguli DAEB, et triangulum CEB est dimidium rectanguli CFEB ; ergo triangulum CED, seu $CEB - DEB = \frac{1}{2} CBEF - \frac{1}{2} DAEB$

$$= \frac{1}{2} CB \times AD - \frac{1}{2} DB \times AD = \frac{CB \cdot DB}{2} \times AD$$

$= \frac{1}{2} CD \times AD$; ac proinde trianguli cuiuslibet

superficies aequalis est dimidio producto ex basi in altitudinem.

Corol. III. Quum parallelogrammum quodlibet dividi possit in duo triangula aequalia, quae ipsam habeant parallelogrammi basim eamdemque altitudinem; patet generatim, superficiem parallelogrammi cuiuscumque esse productum ex basi in altitudinem.

Corol. III. Quotlibet triangula, ideoque etiam quotlibet parallelogrammina inter easdem parallelas, et super eadem vel aequali basi constituta, sunt aequalia. Ergo etiam triangula inter easdem parallelas cum parallelogrammis, et super eadem basi constituta, sunt parallelogrammorum dimidia, ac proinde etiam inter se aequalia. Ex hac propositione pendet vulgaris demonstratio theorematis, quod alio modo iam demonstravimus, nempe *quadratum hypothenusae in triangulo rectangulo aequale esse quadratis laterum seu cathetorum.* Hanc vero geometriae fecunditatem totiusque doctrinae geometricae coniunctionem variis exemplis tironibus saepe ostendere debet peritus magister. Vid. Wolf. *geom. theor. 89. part* I.

Corol. IV. Quum triangula sint, ut dimidium productum ex basi in altitudinem, erunt etiam, ut productum totum, hoc est, triangulorum superficies sunt in ratione composita basium et altitudinum, ac proinde si bases fuerint aequales, triangula erunt inter se, ut altitudines; si autem altitudines fuerint aequales, erunt inter se, ut bases.

Corol. V. Si altitudo trianguli unius sit ad

Fig. trianguli alterius altitudinem, ut basis secundi trianguli ad basim primi, hoc est, si bases sint in ratione inversa altitudinum, triangula sunt aequalia. In hoc enim casu habetur proportio, in qua productum extremorum aequale est producto mediorum, hoc est, productum ex altitudine primi trianguli in basim aequale est producto ex altitudine secundi trianguli in suam basim, ideoque triangula sunt aequalia; et versa vice si triangula sunt aequalia, erunt bases in ratione inversa altitudinum.

Corol. VI. In triangulis similibus superficies sunt in ratione duplicata laterum homologorum. Etenim quum triangula sint in ratione composita basium et altitudinum, atque (*ex hyp.*) sint similia, loco basis substitui poterit altitudo, et contra. Quare triangula similia sunt, ut quadrata, laterum homologorum.

THEOREMA II.

SVPERFICIES POLYGONI REGVLARIS AEQVALIS EST DIMIDIO PRODVCTO EX PERPENDICVLARI PER CENTRVM POLYGONI AD LATVS VNVM DEMISSA IN POLYGONI CIRCVMFERENTIAM.

Etenim triangula omnia, in quae resolvitur polygonum regulare, sunt aequalia (*theorem.* V. *cap.* III.) ideoque eamdem habent altitudinem
28. CI; ergo superficies polygoni regularis $= CI \times \frac{1}{2} AB + CI \times \frac{1}{2} BD + CI \times \frac{1}{2} DE$ cet. Quare quum $AB + BD + DE$ cet. sit tota polygoni periphe-

ria, patet, sûperficiem totam polygoni aequalem esse producto ex altitudine CI in dimidiam polygoni peripheriam, vel dimidio producto ex peripheria polygoni in altitudinem.

Corol. I. Superficies circuli aequalis est dimidio producto ex radio in circumferentiam, *quum circulus nihil aliud sit quam polygonum infiniti laterum.*

Corol. II. Si ex centro circuli ad circumferentiam ducantur radii duo, pars circuli duobus radiis et arcu comprehensa, *sector* dicitur. Evidens autem est, huius sectoris superficiem aequalem esse dimidio producto ex arcu in radium.

THEOREMA III.

FIGVRARVM SIMILIVM SVPERFICIES SVNT IN RATIONE DVPLICATA LATERVM HOMOLOGORVM.

Etenim triangula homologa, in quae reducuntur figurae similes, sunt earumdem figurarum partes similes (*theor. IV. cap. IV.*), ac proinde triangula homologa erunt, ut polygona tota, sed triangula similia sunt in ratione duplicata laterum homologorum (*corolar. VI. theorem. I.*); ergo in eadem etiam ratione sunt figurae similes quaelibet.

Corol I. Superficies circulorum sunt, ut quadrata radiorum vel diametrorum, *quum omnes circuli sint inter se similes*.

Schol. Ex propositionibus praecedentibus nota quidem est ratio, quam habent variae circu-

Fig. lorum superficies ad illorum peripherias et suos radios. At ratio accurata inter circuli circumferentiam illiusque diametrum nondum definiri potuit ita, ut magnitudine diametri numeris expressa, numeris accurate exprimi non possit circuli circumferentia, ac proinde nec ipsa circuli superficies. In hoc sensu intelligi debet, quod vulgo dicitur, nondum scilicet inventam esse circuli *quadraturam*, quod quidem *quadraturae* nomen adhiberi solet, eo quod *quadratum* sit cuiuslibet superficiei communis mensura, ut iam demonstravimus. Eo igitur reducti sunt geometrarum conatus, ut ad illam quadraturam proxime, et quantum voluerint, accedant, hanc tamen accurate non attingant. Qua ratione autem hanc *approximationem* tentare soleant geómetrae, ex ipsis elementis licebit intelligere. Divisus concipiatur circulus primo in quattuor partes aequales, deinde in 8, in 16, in 32, in 64, in 128 cet. prout cuique libuerit; et concipiamus per ea divisionum puncta tangentes et chordas respective ductas: habebuntur polygona duo, quo-
28. rum unum *inscriptum* circulo, alterum autem *circumscriptum*. Quae quidem ambo constant triangulis aequalibus. Porro per methodus explicatas, in his triangulis haberi semper poterunt bases, quae in primo casu sunt circulorum chordae, in altero autem tangentes, ac proinde omnium quoque chordarum et tangentium summa innotescet, hoc est, perimeter polygoni inscripti, quae circuli circumferentia proxime minor est, et polygoni circumscripti perimeter, quae proxime ma-

ior est, ita ut defectus vel excessus, quantum cuique placuerit, tenuis sit, et intra angustissimos limites contrahatur. Hac methodo Archimedes invenit, diametrum ad peripheriam esse in ratione 7 ad 22 ita, ut exiguus omnino sit peripheriae sic inventae excessus supra veram. Haec eadem ratio subtilius ab aliis quaesita est, et statuitur, ut 1 ad 3, 14159265 cet. perductis decimalibus numeris usque ad notas 127; quae quidem *approximatio* est fere infinita. Sed omnium vulgatissima ratio diametri ad peripheriam ea est, quam exprimunt numeri 113 et 355. Quare data circuli diametro habebitur peripheria, si haec fiat proportio 113 ad 355, ut diameter data ad peripheriam quaesitam. Haec multiplicetur per quartam diametri partem, habebitur superficies circuli, sive, ut vocant, *area*. Haec pauca dicta sint de ratione diametri ad peripheriam, sive de quadratura circuli, quam audacter se invenisse non raro iactitant viri geometriae imperiti, qui ipsum quidem quaestionis statum, ut plurimum, non intelligunt.

Simili methodo figura quaelibet curvilinea generatim dividi potest in partes rectilineas. Aliquando per geometriam sublimiorem figurae curvilineae area accurate haberi potest. Sed commodissima et generalis est praxis, qua figurae curvilineae circumferentia in minimas partes, et *physice* rectilineas dividitur, et deinde figurae, totius area investigatur, ut fieri solet in polygonorum mensura.

Porro dum superficierum magnitudinem *pedi-*

bus quadratis aut alia qualibet mensura exprimimus, id nequaquam haberi debet tamquam contrarium iis, quae de numerorum *concretorum* multiplicatione demonstravimus in arithmetica (*schol. ad probl. IV. cap. II arith.*). Non enim pedes per pedes multiplicantur. Ita dum parallelogrammi superficies invenitur, multiplicando basim per altitudinem, hac operatione hoc unum significant geometrae; si nempe habeantur parallelogrammi duo, adhibeaturque quantitas *linearis* quaelibet *a* pro communi basium et altitudinum mensura, et sit B numerus integer aut fractus, rationalis vel irrationalis exprimens, quoties basis parallelogrammi unius contineat quantitatem *a*, atque H exprimat, quoties altitudo eiusdem parallelogrammi eamdem contineat mensuram. Item sit *b* numerus exprimens, quoties mensura *a* contineatur in basi alterius parallelogrammi; *h* autem exponat, quoties altitudo parallelogrammi eiusdem contineat mensuram *a*; parallelogrammorum illorum superficies erunt inter se, ut productum ex duobus numeris B et H ad productum ex numeris duobus *b* et *h*. Haec est genuina huius operationis notio. Quare dum dicitur, parallelogrammi superficiem aequalem esse producto ex basi in altitudinem, *aequalitas* proprie dicta intelligi non debet; sed mera proportio. *AEqualitas enim non habetur, nisi determinetur absoluta mensura eiusdem speciei, quae pro unitate adsumitur.* Haec eadem observatio ad physicam saepe transferri debet, ubi de spatii, velocitatis et temporis mensura sermo est.

SECTIO III.

De geometria solidorum.

CAPUT I.

De solidorum geneſi et proprietatibus.

DEFINITIO I.

Si figura rectilinea AGR supra immotam re- 39.
ctam AE motu sibi semper parallelo feratur ; so-
lidum AGROFE inde genitum , *prisma* dicitur,
et *rectum* vocatur, si AE describenti plano fue-
rit perpendicularis ; si vero recta *e a* descri- 50.
benti plano *abcd* fuerit obliqua, dicitur *obli-
quum*.

Def. *II.* Si planum describens fuerit paralle-
logrammum DCKH , solidum inde genitum 40.
ABGFCDHK dicitur *parallelepipedum*. Si autem
planum describens sit quadratum ABCD , soli-
dum ABCDEFGI *cubus* nuncupatur. Basis soli- 41.
di seu planum describens potest esse quodlibet
polygonum , et solidum inde genitum *prismatis*
nomen retinet, si e singulis polygoni angulis ex-
tra planum consurgant lineae aequales et paralle-
lae terminantes rectilineam solidi faciem.

Def. *III.* At si rectae lineae DA , FA , GA. 42.
EA , HA ex plani describentis angulis D , F , G,
E, H exeuntes in apicem A coëant , solidum

Fig. *pyramis* dicitur, quae vocatur *recta*, si perpendicularis AB ex vertice A ad basim ducta transeat per huius centrum; sin minus, pyramis est
43. *obliqua*.

39. *Corol. I.* Prisma igitur oppositas facies AGR, EFO aequales habet, similes et parallelas; quum AGR fluendo per AE motu sibi semper parallelo tandem congruat cum EFO. Praeterea dum planum AGR motu sibi parallelo describit prisma AGROFE, latera AG, GR, RA motu sibi semper parallelo describunt parallelogramma AEFG, GFOR, ROEA. Ac proinde prisma tot parallelogrammis circumcirca terminatur, quot sunt latera plani describentis.

Corol. II. Parallelepipedum sex parallelogrammis terminatur, cubus autem sex quadratis aequalibus. Nam praeter facies quattuor parallelo laterum motu genitas, sunt etiam facies duae oppositae parallelae basis motu descriptae. Illa autem basis in primo casu est parallelogrammum, in altero autem quadratum.

Corol. III. In pyramide si omnia latera basis
42. DF, FG, GE, EH, HD sunt aequalia inter se, et latera rectilinea ipsius pyramidis DA, FA, GA; EA, HA pariter inter se aequalia, erunt omnes facies triangula isoscelia aequalia.

50. *Corol. IV.* Quaevis sectio prismatis EFGH,
42. vel pyramidis *dfgeh* facta plano basi parallelo est figura prorsus similis basi. Etenim sectionis parallelae singula latera sunt singulis lateribus basis parallela; quum sint intersectiones planorum parallelorum cum iisdem planis. Quare singuli

anguli erunt aequales (*theor. 11. cap. praeced.*), ac proinde sectio basi similis est. Fig.

Corol. v. In prismate EFGH sectio basi parallela ipsi basi aequalis est; in pyramide autem latera sectionis homologa sunt minora, in ratione distantiae sectionis a vertice, ad distantiam basis ab eodem, *hoc est, basis* DFGEH *est ad sectionem dfgeh, ut* BA *est ad ba*. In prismate patet aequalitas, quum facies sint parallelogramma; ac proinde latera sectionis homologa aequalia sunt lateribus basis; ideoque sectio prorsus aequalis est basi. In pyramide proportio etiam patet; nam ob sectionem parallelam in unaquaque facie habebuntur triangula similia, DAF, D*af*, et FAG, *fag* cet. 50. 42.

Corol. vi. Omnia prismata collata inter se, si super basibus aequalibus, et inter eadem plana parallela constituantur, solida respective aequalia comprehendunt; idem dicendum est de pyramidibus eodem modo inter se comparatis. Secentur enim duo prismata ABCDEFGH, *abcdefgh* quotcumque planis EFGH, *efgh*, quae sint basibus parallela, sectiones unius prismatis aequales semper erunt sectionibus respondentibus alterius. Nam in prismate omnes sunt aequales basibus. Porro prismata illa concipi possunt tamquam composita ex his omnibus sectionibus, quarum singulae singulis aequales sunt. Numerus autem sectionum altitudini prismatum aequalis est, seu distantiae inter plana parallela; ergo erunt ipsa prismata aequalia. Eadem demonstratio valet de pyramidibus. Nam in pyramide erunt sectiones ipsi basi 50.

similes, et singula latera in una pyramide erunt ad latera homologa in pyramide altera, in eadem data ratione, nempe in ratione distantiae basis a vertice ad distantiam sectionis ab eodem vertice, quae quidem ratio eadem est, ut patet, quum pyramides terminentur plano basium, et alio plano sectionum planis parallelo. Numerus etiam sectionum aequalis est altitudini, seu eidem distantiae inter duo plana terminantia et parallela.

Corol. VII. Pyramides basium aequalium in eumdem apicem desinentes, vel eamdem utcumque altitudinem habentes sunt aequales. Nam per communem verticem ductum intelligatur planum basium planis parallelum, pyramides semper erunt super aeqnalibus basibus et in iisdem planis parallelis. Similiter si bases in eodem plano constituantur, vertices in eadem altitudine ad idem planum basibus parallelum terminabuntur.

Corol. VIII. Si pyramides eamdem habeant altitudinem; erunt inter se, ut bases. Etenim basis maior divisa intelligatur, si fieri possit, in partes basi minori aequales. Concipi poterit pyramis maior tamquam composita ex diversis pyramidibus, quae basim habeant basi minoris aequalem, sed pyramides illae singulae erunt minori pyramidi aequales, ergo pyramis maior est ad minorem, ut pyramidum aequalium numerus in maiori pyramide, ad pyramidem minorem, hoc est, pyramides illae sunt inter se, ut bases,

At si basis maior minorem basim non conti-

neret accurate, sed tamen habeant aliquam communem mensuram; dividi fingantur bases in partes huic mensurae communi aequales. Iam pyramides duae tot alias continebunt pyramides aequales, quot sunt in utraque pyramide partes communes, ac proinde pyramides sunt etiam, ut bases.

Def. IV. Si recta sublimis BD motu sibi sem- 44.
per parallelo, circuli circumferentiam BGEH radat, figura solida hoc motu genita, *cylindrus* dicitur.

Def. V. At si recta AC per aliquod punctum 46.
fixum, et sublime A perpetuo transiens, altera extremitate G radat circuli circumferentiam GFMO, solidum AGM hoc motu genitum, *conus* vocatur. Vtriusque autem figurae *basis* vocatur circulus, cuius circumferentiam recta percurrit. Patet, cylindrum duobus circulis, conum autem circulo unico terminari. Recta per utriusque circuli centrum in cylindro transiens, in cono autem per basis centrum ipsumque coni verticem, *axis* dicitur. Si axis sit perpendicularis basi, cylindrus vel conus *rectus* solidum genitum appellatur, secus autem, *obliquus* vocatur. Si autem basis fuerit quaevis alia curva, solidum dicitur *cylindricum* vel *conoidicum*. Figura 44. refert cylindrum rectum, figura autem 46. conum rectum repraesentat. Si semicirculus AHB circa immo- 47.
tum diametrum AB in orbem ducatur, donec ad pristinum situm redeat, solidum inde genitum *sphaera* dicitur.

Corol. I. Si basis prismatis vel pyramidis, au-

Fig. cto numero laterum et imminuta magnitudine in infinitum, abeat in curvam continuam, prisma abit in solidum cylindricum, pyramis in conoidicum. Item prisma, cuius latera sunt perpendicularia basi, mutatur in cylindrum rectum; pyramis vero, in qua basis latera sunt aequalia, et distantiae a vertice aequales, abit in conum rectum.

Corol. II. Si sphaera plano quovis secetur,
47. sectio erit circulus HIFO, qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphaerae, C, ac deinde erit maior vel minor, prout planum sectionis minus vel magis recedet a centro sphaerae. Si enim sectio FIH, ad cuius planum ducatur diameter perpendicularis AB, quae plano secanti occurrat in E. Si punctum E congruat cum centro C; patet, rectas EI, EF fore radios sphaerae. Si autem cadat extra centrum, in triangulis CEI, CEF anguli ad E erunt recti, latus CE commune, et basis CI = CF: quare quodvis latus EI = EF, ac proinde in utroque casu sectio erit circulus, cuius centrum E, illud vero centrum in primo casu coincidet cum centro sphaerae. Patet autem, ob angulum rectum in E, radium circuli EF semper minorem fore radio sphaerae CF, nisi radii illi congruant abeunte E in C. Evidens etiam est, eo minorem fore chordam HF, nempe circuli diametrum, quo maior fuerit distantia CE.

Corol. III. Sphaera considerari potest tamquam composita ex pyramidulis aequalibus numero infinitis et infinite parvis, quarum bases

sunt in ipsa sphaerae superficie, vertex autem communis est ipsum sphaerae centrum.

Schol. In capite praecedenti, ubi prismata et pyramydes inter se comparavimus, aliqua dubitatio suboriri potest, quod nempe solida e superficiebus composita habere videamur. Et re quidem vera linea producitur motu continuo puncti, superficies motu continuo lineae, solidum motu continuo superficiei. At linea non ex punctis, sed ex lineolis; superficies ex areolis, non ex lineis; solidum ex spatiolis solidis, non ex superficiebus componitur. Neque genuinam linearum, superficierum et solidorum notionem tironibus proponunt nonnulli magistri, qui lineas tamquam e punctis, superficies ex lineis, solida ex superficiebus composita repraesentant. Itaque dum (*corolar. VI. cap. praeced.*) ex sectionum aequalitate prismatum et pyramidum aequalitatem concludimus; id non debet intelligi, quasi prismata et pyramides ex sectionibus planis componi velimus. Nam loco sectionis unius considerari possent sectiones duae infinite proximae, quarum (*in cit. corol.*) eadem foret distantia sive altitudo, ut patet ex planorum parallelismo. Igitur minima solida duabus sectionibus infinite vicinis comprehensa, forent aequalia in casu proposito; quare communem altitudinem negligere licuit, solamque sectionum aequalitatem considerare; id vero facere numquam licet, nisi praeter sectionum aequalitatem ibi aequales etiam sint binarum quarumcumque indefinite proximarum distantiae. Porro evidens est, hanc metho-

Fig. dum ad *exhaustionum* methodum saepius explicatam reduci, ae proinde ad severitatem geometricam esse omnino compositam.

CAPVT II.

De solidorum mensura.

PROBLEMA I.

39. PRISMATIS AGREFO, CVIVS LATERA RECTILINEA SVNT BASI PERPENDICVLARIA, SVPERFICIEM METIRI.

Singulae prismatis facies in hoc casu sunt rectangula AGFE, GFOR, AEOR sub singulis lateribus basis singulisque prismatis lateribus rectilineis contenta; ideoque omnium huiusmodi rectangulorum summa est tota basis perimeter in latus rectilineum ducta. Quare prismatis superficies, demtis basibus, est productum ex perimetro basis in unum ex lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla basis superficies, habebitur superficies tota prismatis.

41. *Corol. 1.* Quum sex quadratis aequalibus terminetur cubus ACEG, habebitur tota cubi superficies, si quadrati unius superficies sexies su-
40. matur. Quia vero parallelepipedum DK, BG sex terminatur superficiebus, quarum duae quaelibet oppositae sunt aequales, inveniantur tres inaequales superficies, illarumque summa bis sumatur: habebitur tota parallelepipedi superficies.

Corol. II. Quum basis cylindri BGEH considerari posssit, tamquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis et infinite parvis compositum; cylindrus haberi poterit tamquam prisma *infinitilaterum*: cuius proinde superficies habebitur, si tota basis perimeter seu circuli circumferentia ducatur in altitudinem, et producto addatur dupla basis sive dupla circuli superficies. Fig. 44.

PROBLEMA II.

PYRAMIDIS DGA, CVIVS LATERA OMNIA SVNT AEQVALIA, ET BASIS LATERA SVNT ETIAM AEQVALIA, SVPERFICIEM INVENIRE. 42.

Quum facies omnes pyramidis in hoc casu sint triangula isoscelia aequalia DAF, FAG, GAE, EAH, HAD; erit omnium triangulorum summa aequalis dimidio producto ex tota basis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis ad latus quodlibet basis demissum, quod dicitur vulgo *apothegma*: nam triangulum quodlibet aequatur dimidio producto ex latere basis ducto in suum perpendiculum. Haec autem singula perpendicula sunt aequalia; habebitur ergo in hoc casu pyramidis superficies, demta basi, *si basis perimeter ducatur in apothegma rectum*.

Corol. I. Conus est pyramis *infinitilatera*, ac proinde coni recti superficies aequalis est dimidio producto ex circumferentia basis in longitudinem, sive latus coni, sive in apothegma rectum, demta tamen basi.

Fig. *Corol. II.* Si pyramis DAG plano basi paral-
42. lelo *truncata* ponatur, facies omnes reliquae pyramidis versus basim DF*df*, FG*fg*, GE*ge*, EH*eh*, DH*dh*, abeunt in trapezia aequalia; haec autem trapezia singula dividi possunt in triangula duo aequalia, quorum bases sunt sectionis et basis latera, altitudo autem communis est ipsarum basium distantia perpendicularis. Quare singulorum triangulorum mensura est dimidium productum ex singulis basibus in ipsum basium distantiam, ac proinde superficies pyramidis truncatae DG*dg*, aequatur dimidio producto ex summa perimetri basis et sectionis in distantiam perpendicularem basium *sive in apothegma truncatum.*

46. *Corol. III.* Si conus rectus plano basi parallelo BC truncatus ponatur, coni huius truncati versus basim superficies GMBC, aequalis est dimidio producto ex peripheriarum summa in coni truncati longitudinem sive latus seu apothegma BG. Res autem facilius obtinetur, si inveniatur circulus DE, cuius peripheria aequalis sit semisummae peripheriarum BC, GM. Sumatur nempe punctum D medium inter B et G, ducaturque recta DE parallela sectioni BC, haec erit diameter circuli quaesiti. Etenim ductis perpendicularibus B*f*, D*h*, erit ob triangulorum DB*f*, DG*h* similitudinem B*f* : D*f* = D*h* : G*h*, ac proinde, ob B*f* = D*h*, erit etiam D*f* = G*h*; quare eadem est differentia inter diametros BC et DE, quae est inter diametros DE et GM; illa nempe differentia est dupla rectae D*f* vel G*h*; ideoque recta DE est media proportionalis arith-

metica inter BC et GM, seu quod idem est, diameter DE aequalis est semisummae diametrorum BC et GM. Sed circuli, utpote figurae similes, suas habent peripherias diametris proportionales (*schol. cap. III.*); ergo circumferentia circuli, diametro DE descripti, est media proportionalis arithmetica inter circumferentias diametris BC et GM descriptas. Habebitur ergo coni truncati BCGM superficies, si multiplicetur circuli medii DE circumferentia per latus coni BG, seu per huius apothegma rectum.

Corol. IV. Si concipiatur cylindrus rectus KQTM circumscriptus sphaerae, habens pro axe diametrum AB, pro basi circulum sphaerae maximum; superficies segmenti sphaerae HAF aequalis erit superficiei cylindri QNRK, et area totius sphaerae erit aequalis areae totius cylindri, demtis basibus. Etenim concipiatur particula quaevis Ff circuli *genitoris* ita parva, ut infinite accedat ad lineam rectam, productaque Ff et BA usque in G, recta FfG generabit superficiem coni recti, et Ff superficiem coni truncati, cuius mensura erit ipsa Ff ducta in semisummam peripheriarum, quarum radii sunt EF et *ef*. Ducta autem *fx* in EN perpendiculari, et PO ita, ut peripheria radio PO descripta aequalis sit semisummae peripheriarum praedictarum; erit coni truncati superficies, ut recta Ff ducta in circumferentiam, cuius radius est PO (*corol. praeced.*). Iam vero ob triangula similia rectangula *fx*F, GEF, G*ef*, GPO, OPC, erit *fx* vel E*e* vel N*n*: F*f* = GE : GF = GP : GO = PO : CO vel EN,

Fig. 48

ob EN = BT = CO (*sunt enim radii eiusdem circuli*) , ideoque Nn × EN = fF × PO , atque ideo quum peripheriae sint , ut radii ; erit productum ex Nn in peripheriam radio EN descriptam aequale producto ex fF in peripheriam radio PO descriptam. Primum autem productum exprimit aream genitam ab Nn , alterum vero aream genitam ab Ff. Quare tota area genita a toto arcu AfF aequatur toti areae genitae a recta QN ; et abeunte REN in MBT , tota sphaerae superficies totius cylindri superficiei aequalis est , demtis basibus.

Corol. v. Superficies sphaerae aequalis est producto ex circumferentia circuli maximi in axem sive diametrum sphaerae , ac proinde circuli maximi superficie quadruplo maior est (*cor. I. theorem. II. cap. II.*)

Corol. vi. Superficies tota cylindri circumscripti , inclusis basibus , est ad totam sphaerae superficiem , ut 3 ad 2. Nam superficies lateralis cylindri quadruplo maior est area circuli maximi , *cui si addantur duae superficies basium; fit tota superficies cylindri sexies maior sua basi seu circulo maximo.* Superficies autem sphaerae in hoc casu basi cylindri seu circulo maximo quadruplo maior est. *Proinde erit superficies sphaerae ad superficiem cylindri circumscripti,* ut 4 , 6 , seu ut 2 , 3.

PROBLEMA III.

Prismatis soliditatem metiri.

Polygonum, seu quaelibet figura ABCD, quae prismatis basis est, in ipsam prismatis altitudinem ducatur: habebitur soliditas tota prismatis, ut patet ex genesi ipsius solidi, quod producitur motu parallelo basis, ac proinde basis sive polygoni superficies per altitudinem multiplicari debet. *Nempe sectiones basi parallelae ipsi aequales sunt, atque etiam tot numero exsistunt sectiones, quot in altitudine continentur* (corol. VII. cap. I.).

Corol. I. Soliditas cubi ACEG habetur multiplicando faciem quadratam basis ABCD, per ipsum quadrati latus AE. Parallelepipedi AFDK soliditas invenitur, si parallelogrammi DCHK superficies per altitudinem AD multiplicetur. Habetur autem soliditas cylindri BF, si basis circuli, nempe superficies BGEH, in altitudinem cylindri BD ducatur.

Corol. II. Eadem in solidorum mensura ratiocinatione instituta, quam in metiendis superficiebus adhibuimus (*schol. ad theor. III. cap. II.*), evidens est, cubum esse communem solidorum mensuram, non secus ac quadratum est mensura superficierum. Itaque pes solidus continet pollices cubicos 1728, nempe tres habet dimensiones, quarum singulae 1 pedi sive 12 pollicibus aequantur: et ita dicendum de alia qualibet mensura.

ig.

PROBLEMA IV.

Pyramidis soliditatem invenire.

9. Si ad centrum I cubi GL fiat quadrata pyramis, cuius basis QZLO sit cubi facies quadrata, et altitudo IE dimidia altitudini cubi, evidens est, totam cubi soliditatem dividi in sex huiusmodi pyramydes quadrilateras aeque altas et aequalium basium, ac proinde aequales. Igitur pyramis quaelibet erit sexta pars cubi. Sed cubi mensura aequalis est producto ex basi in altitudinem. Ergo illarum pyramidum quaelibet erit aequalis producto ex basi in sextam partem altitudinis HE. vel quod idem est, tertiam partem altitudinis HE. Ergo huiusmodi pyramidis soliditas aequalis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, seu, quod idem est, aequatur tertiae partis prismatis eiusdem basis et eiusdem altitudinis.

Generatim pyramis quaelibet aequalis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, sive pyramis quaelibet est tertia pars prismatis eamdem cum ipsa pyramide basim habentis, eamdemque altitudinem. Etenim sit pyramis quaelibet, fingaturque cubus, cuius altitudo sit altitudinis pyramidis dupla. Iam si ex centro cubi alia exeat pyramis, cuius basis sit facies quadrata cubi; evidens est, hanc pyramidem habere eamdem cum proposita pyramide altitudinem, ac proinde pyramides illae sunt inter se, ut bases (*corol.* VIII. *theor.* I. *cap. praeced.*) Sed so-

liditas pyramidis cubi basi innixae aequalis est producto ex tertia parte altitudinis in basim ; ergo ob altitudinem eamdem in utraque pyramide erit soliditas propositae pyramidis aequalis producto ex tertia parte altitudinis in basim. Ideoque generatim pyramis quaelibet est tertia pars prismatis eiusdem basis et altitudinis.

Corol. I. Quum cylindrus tamquam prisma infinitilaterum, itidemque conus tamquam pyramis infinitilatera, considerari possint, erit conus tertia pars cylindri eamdem habentis basim et eamdem altitudinem.

Corol. II. Quum sphaera haberi possit tamquam composita ex infinitis pyramidulis , quarum vertex communis est in centro sphaerae; bases autem omnes simul sumtae totam occupant sphaerae superficiem ; singulae illae pyramides aequales sunt producto ex tertia parte radii in suas bases , ac proinde tota pyramidum summa aequalis est producto ex omnibus basibus simul sumtis , hoc est , ex superficie sphaerae in tertiam partem radii. Ergo tota sphaerae soliditas habebitur , multiplicando tertiam radii partem per circuli maximi superficiem quater sumtam.

Corol. III. Quum soliditas cylindri sit productum ex diametro in circulum maximum , soliditas sphaerae aequalis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti. *Si nempe peripheria circuli maximi sit* $= p$. *et radius* $= r$, *erit area circuli maximi* $= \frac{1}{2} pr$, *adeoque soliditas cylindri circumscripti*$= pr^2$. *Soliditas vero sphaerae est* $= 2pr \times \frac{1}{3} r = \frac{2}{3} pr^2$. *Proinde erit soli-*

ditas sphaerae ad soliditatem cylindri circumscripti $= \frac{2}{3} pr^2 : pr^2 = \frac{2}{3} : 1 = 2 : 3$.

THEOREMA I.

SOLIDA DVO SIMILIA SVNT IN RATIONE TRIPLICATA LATERVM HOMOLOGORVM.

Ex solidorum definitione et ex praecedentibus propositionibus evidens est, corporis cuiuslibet soliditatem esse semper, ut productum ex aliqua superficie in aliquem axem vel aliquam altitudinem. Superficies autem ex duabus dimensionibus componitur. Ergo solidum quodlibet est in ratione composita trium dimensionum homologarum seu eiusdem nominis; sed solida similia ea dicuntur, quae singulas dimensiones homologas habent proportionales; ergo solida similia sunt in ratione composita ex tribus dimensionibus proportionalibus; ac proinde in ratione triplicata unius cuiuslibet dimensionis homologae.

Corol. 1. Sphaerae sunt in ratione triplicata diametrorum. Etenim sphaerarum soliditates sunt inter se, ut circuli maximi superficies in radium ducta * (*corol. 11. theor. praeced.*). Sed circulorum superficies sunt in ratione duplicata semi-

* *Hoc est, soliditates sphaerarum sunt, ut quattuor circuli maximi superficies ductae in* $\frac{1}{3}$ *radii; sed quantitatum partes determinatae sunt, ut quantitates ipsae: ac proinde valet etiam proportio Auctoris.*

diametrorum (*corol. I. theor. III. sect. praeced.*), ergo sphaerae sunt in ratione triplicata semidiametrorum vel diametrorum. Idem facile patet ex sphaerarum similitudine. Quum enim sphaerarum soliditates per circuli maximi superficiem determinentur, sintque circuli figurae similes; evidens est, sphaeras esse solida similia, ac proinde in ratione triplicata diametrorum.

Corol. II. Cubi sunt solida similia, itemque similes sunt cylindri sphaeris circumscripti (*corol. III. probl. praeced.*). Ergo cubi sunt in ratione triplicata laterum, et cylindri sphaeris circumscripti sunt in ratione triplicata diametrorum.

Corol. III. Prismata omnia, si inter se comparentur, ac pyramides omnes inter se erunt ut producta ex basibus et altitudinibus. Quare si bases fuerint aequales, erunt solida ut solae altitudines; si autem altitudines fuerint aequales, erunt ut solae bases. Si ea solida fuerint aequalia, altitudines erunt basibus reciproce proportionales. Et versa vice, si bases fuerint altitudinibus reciproce proportionales, solida erunt aequalia. Tandem si bases fuerint similes, et altitudines lateribus basium homologis proportionales, solida erunt in ratione triplicata laterum homologorum vel altitudinum.

Schol. De solidorum rectorum superficiebus in capite praecedenti sermonem habuimus. Verum si solida fuerint obliqua, superficierum mensura sublimiorem geometriam aliquando postulat. Quod spectat ad solida superficiebus planis terminata, res est nullius difficultatis. Quum enim solidorum

Fig. illorum facies sint polygona rectilinea, ad triangulorum superficiem reduci semper poterit illorum mensura. Prismatis cuiusvis exemplo rem illustrabimus. Per punctum quodlibet in aliquo prismatis latere traductum intelligatur planum ad latus illud perpendiculare; idem planum alia omnia prismatis latera, utpote parallela, perpendiculariter quoque secabit (*cor. v. theor. 1 cap. 1. sect. 11.*), atque sectio erit polygonum, cuius unumquodque latus ad duo parallela prismatis latera erit perpendiculare. Quare superficies uniuscuiusque faciei aequabitur producto ex unoquoque sectionis latere in prismatis latus quodlibet, ob laterum omnium aequalitatem; ac proinde prismatis superficies aequatur producto ex omnibus lateribus sectionis, hoc est, ex tota sectionis perimetro in prismatis latus quodlibet seu eius apothegma. Iam si prisma rectum ponatur, planum lateri perpendiculare coincidit cum basi, ideoque superficies prismatis aequalis est producto ex perimetro basis in altitudinem, ut antea, quod idem valet in superficie cylindri, qui potest considerari tamquam prisma infi-
45. nitilaterum. At si rectus non fuerit cylindrus AC, planum per cylindri axem vel latus quodlibet perpendiculariter traductum GMIM sectione sua cum cylindro obliquo generabit curvam, quae *ellipsis* vocatur a geometris, de qua in append. mox addenda pauca dicemus. Erit autem cylindri obliqui superficies aequalis producto ex ellipsis GMIM circumferentia in latus cylindri seu apothegma AB. Quod spectat ad coni obliqui superficiem, patet, eam ad sectoris circularis su-

perficiem, ut fit in cono recto, reduci non posse, quum in cono obliquo aequales non sint lineae omnes ductae ex vertice coni in basim. Sed haec pauca monuisse satis sit; haec enim ad geometriae elementa non pertinent.

APPENDIX.

De lineis curvis.

Lineae curvae notionem ita simplicem esse iam observavimus, ut explicatione ulla vix clarior effici possit. Quare pretermissa definitione, de lineis curvis generatim, et deinde de parabola et ellipsi pauca exponemus, alia deinde, ubi necessitas occurret, demonstraturi.

Def. I. In curva qualibet recta AD lineas 52.
parallelas, ut M*m*, N*n*, aequaliter dividens, *diameter* curvae appellatur. *Axis* autem vocatur, si easdem parallelas ad angulos rectos secet.

Defin. II. Punctum A in axe *vertex* curvae dicitur: rectae autem parallelae M*m*, N*n* dicuntur *ordinatae*: pars diametri vel axis inter punctum A et ordinatam comprehensa, dicitur *abscissa*. *AEquatio* curvae appellatur formula algebraica, quae relationem inter semiordinatas et abscissas exprimit. Ita demonstratum est in circulo quadratum rectae EO aequale esse producto ex CO in OL. Iam diameter CL dicatur a, sitque CO $= x$, et EO $= y$. Erit OL $= a - x$; ac proinde $y^2 = ax - x^2$, quae est aequatio ad circulum.

Corol. 1. Ex his evidens est, ordinatas et abscissas curvae esse quantitates indeterminatas. Hae autem determinantur, sumtis pro arbitrio alterutrius quantitatis valoribus. Ita si in aequatione ad circulum fiat $x = o$: 1, 2, 3, 4, cet. Et $a = 10$, invenietur $y = 0, 3, 4, \sqrt{21}, \sqrt{24}$ cet. Quare si ex singulis punctis erigantur perpendiculares hoc modo determinatae, et per singulas perpendicularium extremitates ducatur curva, haec ad quaesitam curvam eo accuratius accedet, quo plures erunt huiusmodi perpendiculares. Ordinatae non solum ad axem, sed ad quamlibet diametrum referri possunt, atque etiam initium abscissarum non a solo diametri aut axis vertice computari potest, sed etiam ab aliis punctis. Ita in circulo abscissae computari possunt vel ab ipso diametri vertice vel etiam a centro, atque ita prodeunt diversae eiusdem curvae aequationes.

Schol. 1. Verum quocumque modo curva consideretur, probe distingui debent rectae ad dexteram vel ad sinistram iacentes, et ideo dicuntur *positivae* vel *negativae*. Has quidem vel illas appellare licet positivas vel negativas. * At ubi appellatio determinata est, haec semper retineri debet. Quare semiordinatae et abscissae possunt esse vel negativae vel positivae. Ratio autem facile patet ex iis, quae de quantitatibus positivis

* *Vsus tamen obtinuit, ut quae ad dexteram diametri iacent, sint positivae; quae ad sinistram, negativae.*

et negativis in algebra observavimus (*schol. ad probl. IV. cap. III.*).

Schol. II. Curva quaelibet considerari potest vel tamquam curva *polygona*, vel tamquam curva *accurata*. Primus considerandi modus nihil aliud significat, nisi curvam esse polygoni inscripti et circumscripti *limitem*. Vnum autem probe observandum est in curvarum consideratione; si nempe curvam aliquam velut polygonam quis tractaverit, cavere deinde debet, ne eamdem curvam velut accuratam habeat, et vice versa. Atque etiam eadem regula tenenda est in duarum curvarum consideratione, ambae scilicet vel tamquam polygonae vel tamquam accuratae considerari debent; inde etiam in rebus physicis orti sunt errores aliqui. Rem exemplo demonstrabimus. In circulo quocumque PQD, ducantur 51.
chordae aequales et infinitesimae PD, DE, producaturque PD in O, donec DO = PD. Praeterea agatur per puncta O et E recta OQ, et per punctum D tangens DN rectae OQ occurrens in N; erit OE = 2NE. Etenim triangulum DOE est isosceles; praeterea anguli ODE mensura est dimidius arcus PDE. *Nam angulus* ODE + PDE = 180° = $\frac{1}{2}$ PQEP, *sed mensura anguli* PDE = $\frac{1}{2}$ PQE: *ergo mensura anguli* ODE = $\frac{1}{2}$ PDE. Anguli autem NDE mensura est dimidius arcus DE (*theor. IV. cap. II. sect. I.*); ergo recta DN aequaliter dividit angulum ODE (*corol. I. theor. II. cap. II. sect. I.*), ideoque ob DO = DE, erit OE = 2NE. Iam ponatur, corpus aliquod describere arcum circuli infinitesi-

mum PDE, vi aliqua urgente secundum directionem datam, quae in loco D corpus a linea retrahat recta. Si consideratur circulus tamquam polygonum, chorda infinitesima PD erit spatiolum tempore praecedenti infinitesimo percursum, eritque DO lineola aequalis et in directum posita spatiolum alterum tempore subsequenti aequali descriptum. Quare si ducatur OE directioni vis in D agentis parallela, erit haec lineola OE vis huius effectus: vi enim illa corpus ex O transit ad arcum circuli. At si consideretur circulus tamquam accuratus, tangens DN erit lineola vi urgente descripta, ideoque NE vis huius effectus. Itaque in curva polygona vis effectus repraesentatur per OE, et in curva accurata per NE. Quare in virium mensura retinenda est eadem curvarum consideratio, alioquin effectus duplo maior aestimaretur. Verum quia in virium doctrina ipsarum virium effectus dumtaxat comparamus, res perinde se habet, quaecumque adhibeatur curvarum consideratio, *dummodo sit intra eamdem speciem*; eadem enim prodit effectuum proportio. Haec autem, quae modo explicavimus, referuntur ad virium centralium doctrinam in physica generali demonstrandam.

Schol. III. Haec eadem doctrina ad curvam quamlibet transferri potest. Quod ut intelligatur, curvarum descriptionem generatim considerabimus. Curva quaelibet plana considerari solet tamquam ex motu puncti, et perpetua directionis mutatione in plano genita. Heic non agimus de

curvis, quarum puncta singula in eodem non sunt plano, et ideo dicuntur *duplicis curvaturae*. Itaque evidens est, curvam quamlibet ad lineas duas in plana positione datas, ordinatas nempe et abscissas, referendam esse; ad determinandam nempe alicuius curvae naturam, oportet, puncti mobilis vestigia secundum certam eamdemque legem ad rectas positione datas referri ita, ut punctum illud secundum eamdem omnino legem in quolibet infinitesimo mutatae directionis angulo moveatur: alioqui non eamdem, sed plures curvas describeret (*contra hyp.*). Ex hac curvarum consideratione aliqua sane utilissima colliguntur.

Corol. I. Recta curvam quamlibet in unico puncto tangit. Ponamus enim, rectam in duobus tribusve punctis contiguis curvam tangere; iam punctum mobile directionem perpetuo non mutaret, quod repugnat.

Corol. II. Si descriptus intelligatur circulus, qui communem cum data curva tangentem in aliquo puncto habeat ita, ut cuiuscumque circuli minoris, eamdem habentis tangentem, arcus aliquis, utrinque circa punctum contactus, sit intra curvam, cuiuscumque vero circuli maioris arcus sit extra curvam; hunc circulum dicimus curvae *osculatorem* in dato puncto, et curvae ipsius *curvaturam* dicimus *circulari curvaturae anologam*. Evidens autem est ex geometriae elementis, circuli osculatoris centrum positum esse in concursu duarum perpendicularium ad eamdem curvam, ubi puncta duo curvae ad se in-

vicem in infinitum accedunt. Haec enim est circuli proprietas, ut rectae a centro ad peripheriam ductae sint ipsi peripheriae perpendiculares, talis autem recta a centro circuli osculatoris ad curvam ducta vocatur *radius osculator*.

Corol. III. Quamvis inter tangentem et arcum circuli transire possint alii circuli innumeri, attamen inter arcum curvae et arcum circuli osculatoris nullus alius circulus transire potest; nam (*ex def.*) quicumque minor circulus est intra curvam; quicumque maior est extra ipsam. Tota circulorum osculatorum utilitas eo reducitur, ut omnium curvarum arcus infinitesimus considerari possit tamquam circularis. Etenim arcus infinitesimus circuli osculatoris, et arcus infinitesimus curvae easdem habent proprietates, quum radius sit ad circulum osculatorem et ad arcum infinitesimum curvae perpendicularis.

Corol. IV. Hinc definiri potest curvarum in quolibet puncto curvatura. Satis enim erit diversas circulorum osculatorum curvaturas inter se comparare; quod quidem facile fieri potest. Etenim evidens est, diversorum circulorum curvaturas esse in ratione reciproca radiorum. Quod ut intelligatur, fingamus, duas rectas aequales in circulum flecti, unam quidem in totam circumferentiam, alteram vero in semicircumferentiam tantum; manifestum est, semicircumferentiam duplo minus curvam esse quam circumferentiam integram; et duplo maior est radius circuli, ad quem semicircumferentia illa pertinet. Idem simili ratiocinatione patet, si recta eadem

in arcum duplo vel triplo maiorem incurvetur; Fig.
et ita deinceps. Comparari ergo inter se possunt diversae curvarum curvaturae, atque etiam variae eiusdem curvae in diversis punctis curvaturae. Inveniatur nempe in diversis punctis radius circuli osculatoris, hoc est, circuli, qui curvam in dato puncto tangens cum ipsa curva ita congruat, ut inter curvam et circulum nullus alius circulus transire possit. Et quidem quum aucto vel diminuto circuli radio, minuatur vel augeatur per gradus illius curvatura, si nullus sit circulus, qui propius quam circulus osculator ad curvam accedat, concludendum est, circulum cum ipsa curva in hoc puncto eamdem habere curvaturam. Ex his patet, finitam esse curvae alicuius curvaturam, si finitus sit radius osculator; at si radius osculator sit infinitus, curvatura est nulla; tandem si radius osculator $= 0$, curvatura est infinita. Ceterum haec omnia facilius intelligentur, si revocentur in memoriam, quae de methodo *exhaustionum*, et de *primis* ac *ultimis rationibus* iam explicata sunt. Haec pauca, quorum usus in physicis institutionibus recurret, ex sublimiori doctrina delibasse satis sit. Superest, ut parabolae et ellipseos naturam breviter exponamus.

De parabola.

Defin. Si in axe AD sumantur abscissae quot- 52.
libet AF, AP, et ad singula puncta erigantur semiordinatae FM, PN, ea lege; ut abscissae sem-

per sint, ut quadrata ordinatarum; curva per singulas ordinatarum extremitates transiens, dicitur *parabola.* Iam abscissa dicatur x, et ordinata y, erit semper x, ut y^2; ac proinde ratio ordinatarum ad abscissas constans et eadem manet.

Quare si p sit quantitas constans, erit $\frac{yy}{x} = p$, ac

proinde $y^2 = px$, quae est aequatio ad parabolam. Nempe in omni parabola quadratum ordinatae aequale est producto ex abscissa in quantitatem constantem; haec autem quantitas constans *parameter* dicitur. Si in axe parabolae abscindatur recta AF, quae sit quartae parametri parti aequalis, punctum F parabolae *focus* appellatur.

Corol. I. Quoniam crescente abscissa, crescit etiam quadratum ordinatae, evidens est, parabolam non esse curvam in se redeuntem, sed puncta illius singula ab axe perpetuo recedere in infinitum.

Corol. II. Data abscissa qualibet eiusque ordinata, inveniri semper poterit parameter; quum sit tertia proportionalis ad abscissam et ordinatam.

Corol. III. Si abscissa ponatur = o, fit quoque ordinata M*m* = o, ac proinde puncta M, *m* coëunt in A, nempe in axis vertice. Quare si per verticem parabolae ducatur recta ordinatis parallela, haec erit tangens parabolae in puncto A.

Corol. IV. Ducta intelligatur secans per punctum N, quae parabolae occurrat in alio puncto *t*, ex quo demittatur perpendicularis *tp* ad

quam ex puncto N demittatur perpendicularis Nq axi parallela. Sit $PT = s$, $AP = x$, $PN = y$; erit

$PT\ (s) : PN\ (y) = Nq\ (f) : qt = \frac{fy}{s}$; ac

proinde $bt = PN + qt = y + \frac{fy}{s}$, et $Ab = x + f$.

Iam sumatur aequatio ad curvam, in puncto t erit

$bt^2 = Ab \times p$, hoc est, $y^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2 y^2}{s^2} = px + pf$

deletisque in hac aequatione terminis aequalibus:

$y^2 = px$, fiet $\frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = pf$ et dividendo per f,

erit $\frac{2y^2}{s} + \frac{fy^2}{s^2} = p$. Iam puncta N et t ad se invicem accedant in infinitum, mutuoque coëant; secans abit in tangentem, fitque Nq, vel

$Pb = 0$: quare $f = 0$, et $\frac{fy^2}{s^2} = 0$, ac proinde

aequatio praecedens abit in hanc $\frac{2y^2}{s} = p$, et

$2y^2 = ps$, seu ob $px = y^2$, fiet $2px = ps$, $2x = s = PT$. Igitur in parabola recta PT, quae *subtangens* dicitur, dupla est abscissae AP.

Corol. v. Recta FN ducta ex foco parabolae ad extremitatem ordinatae cuiuslibet, aequalis

Fig. est abscissae AP, et quartae parti parametri. Nam quum sit $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4} p$, vel $= \frac{1}{4} p - x$, prout ordinata iacet supra vel infra punctum F; erit $PF^2 = (AP - AF)^2 = x^2 - \frac{1}{2} px + \frac{1}{16} p^2$. Praeterea $PN^2 = px$, ergo $FN^2 = PF^2 + PN^2 = x^2 - \frac{1}{2} px + \frac{1}{16} pp + px = x^2 + \frac{1}{2} px + \frac{1}{16} pp$ et $FN = x + \frac{1}{4} p = AP + AF$.

Corol. VI. Si per punctum contactus ducatur recta QS axi parallela, angulus GNS aequalis est angulo FNT. Nam angulus GNS aequatur angulo FTN: praeterea triangulum FTN est isosceles ob $FN = AP + AF = AT + AF = FT$, ac proinde angulus GNS aequalis est angulo FNT. (*corol. II. theor. II. cap. III. sect. I.*). Haec est tangentis proprietas, quae in physicis institutionibus erit utilitatis maximae.

De ellipsi.

53. *Def.* Si in axe HI sumantur abscissae quotlibet, et ad singula puncta erigantur ordinatae FN et PM ea lege, ut sit semper FN^2 ad PM^2 in ratione $LF \times FI$ ad $LP \times PI$; curva per singularum ordinatarum extremitates transiens vocatur *ellipsis*, quae in circulum abit, si quadrata ordinatarum sint aequalia producto ex segmentis abscissarum. Iam dicatur axis maior $HI = a$,

ducaturque per punctum axis medium C recta BCD[2] quae dicitur axis minor, sitque BD $= b$, HP $= x$, PM $= y$, PI $= a - x$, erit $\overline{a\ x} \times x : y^2 = a^2 : b$ et $y^2 = \frac{ab^2 x - b^2 x^2}{a^2}$, quae est aequatio ad ellipsim, in qua si ponatur $a = b$, fit $y^2 = ax - xx$ aequatio ad circulum. Si abscissae computentur a centro C, sit CP $= x$, PM $= y$, fiatque HI $= 2a$; erit in hoc casu $aa - xx : y^2 = aa : bb$, et $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Si ex minoris axis extremitate B, tamquam centro, et intervallo BF $=$ CL, tamquam radio, describatur arcus circuli, axi maiori occurrens in punctis F et f, puncta illa vocantur ellipseos *foci*. Evidens autem est, haec puncta a centro ellipseos aequaliter distare, nam ob BC axi perpendicularem triangula CBF et CBf sunt aequalia.

Corol. 1. Quum duo ellipseos axes sint constantes, constans etiam est recta iisdem duobus axibus tertia proportionalis; haec autem linea *parameter* dicitur. Quia autem duo sunt ellipseos axes, duae etiam sunt parametri; si nempe axis maior sit primus proportionis terminus, tertia proportionalis parameter axis maioris dicitur, et contra. Iam si abscissae ab axis extremitate computentur, sit axis maior a, minor b, parameter p; erit $ap = b^2$. Si autem abscissae computentur a centro, sit $2a$ axis maior, et $2b$ axis minor, erit $2ap = 4b^2$. His autem valoribus in utraque

aequatione ad ellipsim substitutis, aequatio ellipseos in primo casu fit $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$; in casu altero habetur $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{px^2}{2a}$.

Corol. II. Ex ellipseos aequatione evidens est, eam esse curvam in se redeuntem, et undique terminatam. Crescentibus enim abscissis a centro computatis, decrescunt ordinatae; ac tandem omnino evanescunt, si abscissa semiaxi aequalis sumatur. Manifestum est, mutua axium in centro C intersectione ellipsim in quattuor partes similes et aequales dividi, quum eadem sit ad quamlibet partem curvae aequatio, omnesque proprietates perinde se habeant. Quia vero ordinata perpendiculari N*n* perpetuo decrescente, puncta N et *n* coëunt in H; patet, tangentem in H esse perpendicularem.

Corol. III. Distantia focorum a centro facile invenitur. Nam quum sit BF = HC, erit $FC^2 = HC^2 - BC^2 = \overline{HC - BC} \times \overline{HC + BC}$. Quare distantia foci a centro est media proportionalis inter semiaxium summam illorumque differentiam. Praeterea ob triangulum BCF rectangulum erit $BC^2 = HC^2 - FC^2$, ac proinde HC — FC : BC = BC : HC + FC, seu HF : BC = BC : FI, nempe semiaxis minor est medius proportionalis inter foci unius distantias ab utroque axis maioris vertice.

Corol. IV. Ex ellipseos constructione, summa rectarum BF et Bf aequalis est axi maiori; at ponamus, eamdem manere summam in quolibet puncto, sitque RF + Rf = HI. Dicatur HC = a, BC = b, ordinata RS = y, CS = x, fC = c; erit IS = $a - x$. HS = $a + x$, fS = $c - x$, FS = $c + x$, HF, vel If = $a - c$, Hf, vel IF = $a + c$. Iam vero quum sit (*per hypoth.*) FR + fR = $2a$, si differentia inter FR et fR dicatur $2z$, erit fR = $a - z$, et FR = $a + z$. Iam ob triangula FRS et fRS rectangula erit $f\mathrm{S}^2 + \mathrm{SR} = f\mathrm{R}^2$, hoc est, $cc - 2cx + x^2 + y^2 = a^2 - 2az + z^2$. Praeterea $\mathrm{FS}^2 + \mathrm{SR}^2 = \mathrm{FR}^2$, hoc est, $c^2 + 2cx + xx + y^2 = a^2 + 2az + zz$; habentur ergo aequationes duae, quarum prima si a secunda subtrahatur, fiet $4cx = 4az$, et $z = \frac{cx}{a}$, quo valore substituto in prima aequatione loco z, ideoque et $\frac{c^2 x^2}{a^2}$ loco z^2, erit

$$c^2 - 2cx + xx + yy = aa - \frac{2acx}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2},$$

factaque, ut moris est, reductione, habebitur $a^2 c^2 + a^2 x^2 + a^2 y^2 = a^4 + c^2 x^2$, et $a^2 y^2 = a^4 - a^2 c^2 - a^2 x^2 + c^2 x^2$, factaque divisione per $a^2 - c^2$ habetur $\frac{a^2 y^2}{a^2 - c^2} = a^2 - x^2$; loco b^2 substituatur $a^2 - c^2$, fiet $\frac{a^2 y^2}{b^2} = a^2 - x^2$ et tandem

$y^2 = \frac{a^2 b^2 \quad b^2 x^2}{a^2}$; quae est aequatio ad ellipsim antea inventa. Haec ergo est ellipseos proprietas, ut ductis ex utroque foco rectis, ad punctum perimetri quodlibet concurrentibus, rectarum illarum summa sit axi maiori semper aequalis. Hanc eamdem proprietatem ex aequatione ellipseos derivare facile est. Verum ex proprietate ipsa aequationem elicere placuit, ut exemplum esset tironibus, qua ratione ad aequationem curvae ex data aliqua proprietate pervenire liceat. Hinc evidens est, datis duobus ellipseos axibus, ellipsim facili manu describi posse; sumtis nempe in axe maiori duobus punctis tamquam focis, his adfixum retineatur filum, atque per fili longitudinem ita promoveatur acus aliqua, ut filum perpetuo tensum maneat, acus motu suo ellipsis peripheriam percurret, ut patet ex perpetua partium fili et axis aequalitate.

Corol. v. Si ex puncto R in ellipseos perimetro ad utrumque focum f, F ducantur rectae FR, fR, et in linea producta FR sumatur RT = Rf, ducaturque Tf, ad quam per punctum medium E, et per punctum R agatur ER; haec erit tangens in R. Etenim ponamus, rectam ER ellipsi occurrere in alio puncto r. Ex hoc puncto r in recta RE agantur lineae rT, rf, rF. Quoniam (*per constr.*) TR = Rf, et fE = ET, erit RE perpendicularis ad fT, ac proinde singula puncta rectae ERr aequaliter distant a punctis f, T, ideoque rf = rD. Sed Fr + rT ma-

ior est , quam FT ; ergo etiam $Fr + rf$ maior est , quam FT ; ideoque etiam maior , quam HI; quum (*per constr.*) sit $FT = HI$. Quare punctum *r* non pertinet ad ellipsim ; ergo recta RE tangit ellipsim in unico puncto R. Haec est utilissima in physicis institutionibus tangentis proprietas , quam quidem ex ellipseos aequatione , non secus ac in parabola fecimus , eruere licebat; sed diversas veritatis inveniendae vias tironibus demonstrare maxime convenit. Fig.

Schol. Parabolae et ellipseos aequationem consideravimus , ordinatis ad axem relatis. At ex demonstratis facile erit curvarum illarum aequationes invenire , si ordinatae ad diametrum quamlibet referantur : eadem est in singulis casibus curvarum illarum natura. Primarias dumtaxat proprietates demonstrare satis sit , alias enim , ubi necessitas postulaverit , in physicis institutionibus explicabimus. Praeterea etiam ad exercendum acuendumque ingenium aliquid tironibus relinquere oportunissimum est , idque postulat recta docendi ratio. *Sectiones conicae* appellantur parabolae et ellipsis , quibus etiam adnumerari debet *hyperbola* , de qua nullum verbum fecimus , utpote nullius fere usus in nostris physicis institutionibus futura. Denominationis ratio facile patebit , si tres illas curvas in coni sectione consideremus.

Sit ABC conus circulari basi insistens , et 54
secetur plano quolibet IEM. Ponatur sectio alia KILM parallela basi , et occurrens priori sectioni in HI , intelligaturque sectio tertia priores duas

in EH, et KL perpendiculariter biſecans, atque etiam conum in triangulo ABC. Iam producto EH, donec ipſi AK occurrat in D, ductiſque EF ac DG rectae KL parallelis, et occurrentibus ſectioni triangulari in F et G, dicatur $EF = a$, $DG = b$, $ED = c$, $EH = x$, et $HI = y$, ob triangulorum EHL et EDG ſimilitudinem,

erit $ED\ (c) : DG\ (b) = EH\ (x) : HL = \frac{bx}{c}$.

Simili modo, ob triangulorum DEF et DHK ſimilitudinem, erit $DE\ (c) : EF\ (a) = DH\ (c-x)$

(Fig. 54.) vel $c + x$ (Fig. 55.) : $HK = \frac{ac \mp ax}{c}$.

Tandem quum ſectio KIL parallela baſi ſit circulus, ut patet ex geneſi ipſius coni, erit

$HK \times HL = HI^2$, hoc eſt, $\frac{abx}{c} \mp \frac{abxx}{cc} = yy$.

At ſi ponatur, ſectionem ita ſe habere, ut ED non occurrat lateri AK, ſed ſit ipſi parallela; tunc erit $HK = EF = a$, ideoque $EF \times HL = HI^2$, hoc eſt, $\frac{abx}{c} = y^2$. Si aequationes illas ſeorſum

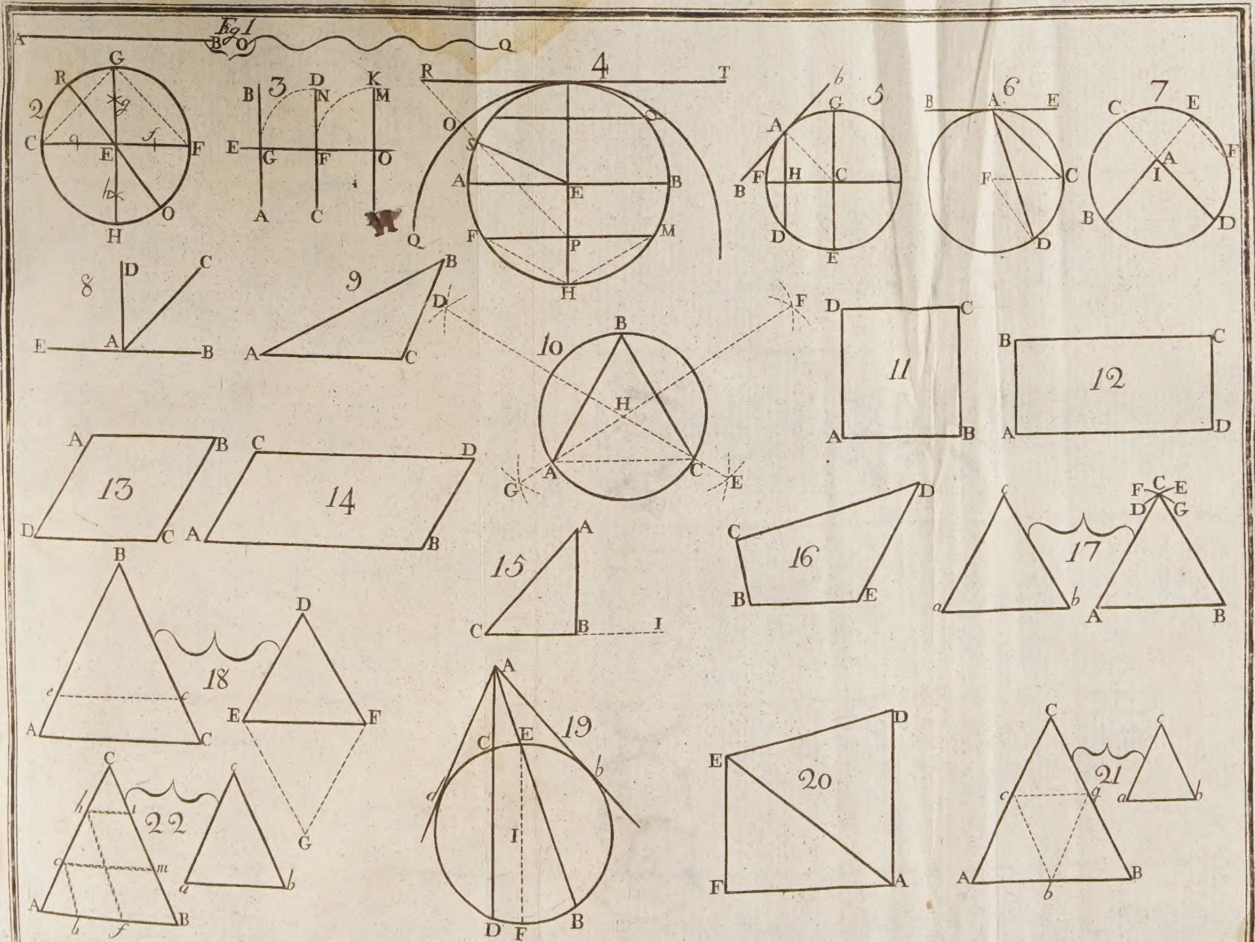
consideremus, evidens est, figuram 54 ellipsim Fig.
referre, quum quadrata ordinatarum semper sint, ut productum ex segmentis abscissarum. Figura 55 refert curvam, quae *hyperbola* dicitur. In hac autem curva non secus ac in ellipsi, quadrata ordinatarum sunt, ut productum ex segmentis abscissarum; sed probe notandum est discrimen. Sectio conica est ellipsis, si planum secans sectioni triangulari perpendiculare duobus coni lateribus occurrat; ac sectio conica fit hyperbola; si planum secans neque sit coni lateribus parallelum, neque duo secet coni latera; sed in hoc casu sectio ita se habet, ut planum secans productum cono ad verticem opposito occurrat in D, alteraque sectione generet hyperbolam oppositam. Recta DE dicitur *axis transversus*, punctum huius axis medium vocatur *centrum* hyperbolarum, per quod si ducatur hinc et inde recta perpendicularis ea proportione, ut productum ex segmentis abscissarum sit ad quadratum ordinatae, sicut est quadratum axis transversi ad quartum terminum proportionalem; habebitur quadratum axis, qui *coniugatus* vel *secundus* axis appellatur. Igitur in aequatione ad hyperbolam punctum D sumitur in hyperbola opposita, et productum ex segmentis abscissarum est

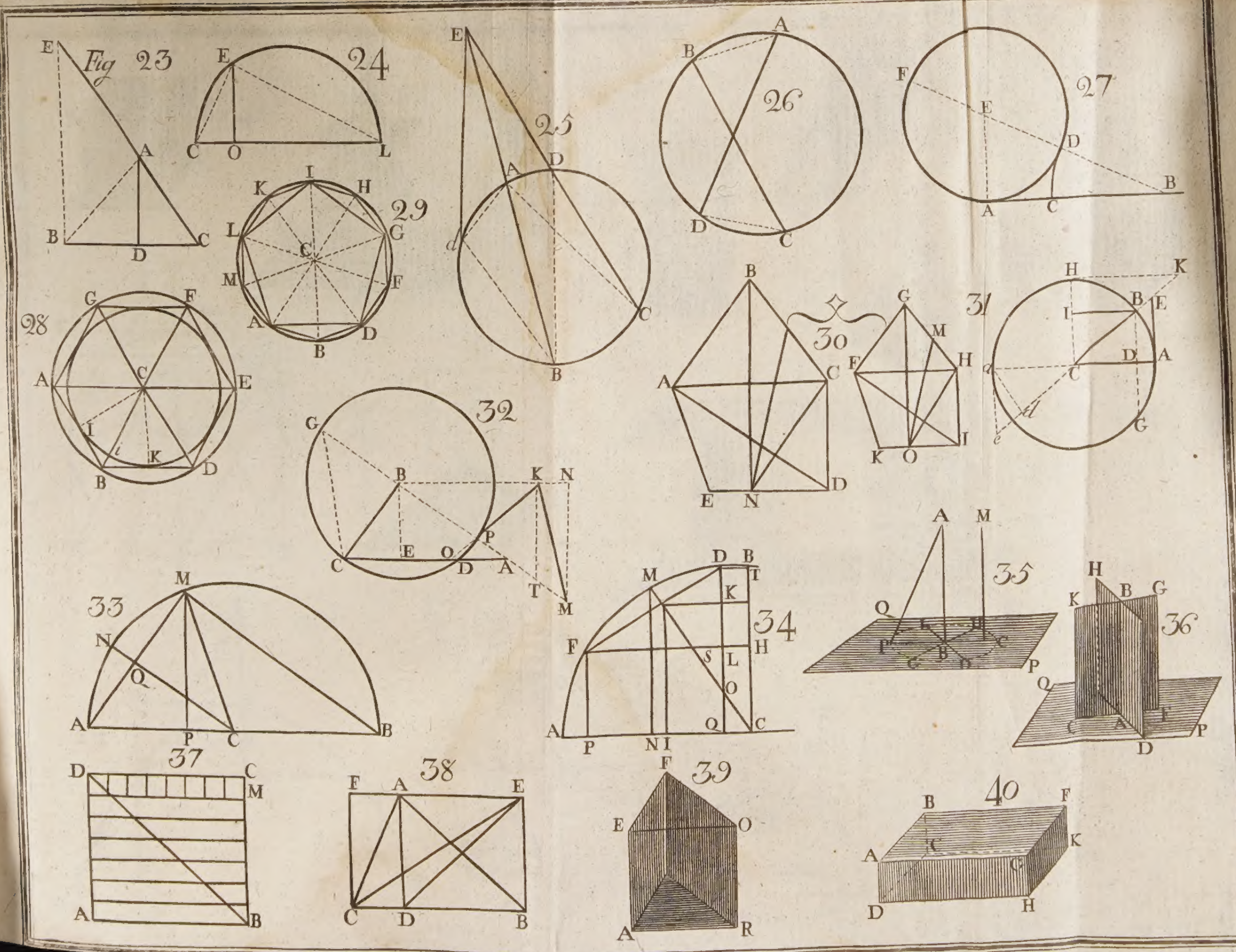
DH × EH. Tertiam aequationem $\frac{abx}{c} = y^2$ esse ad 55.

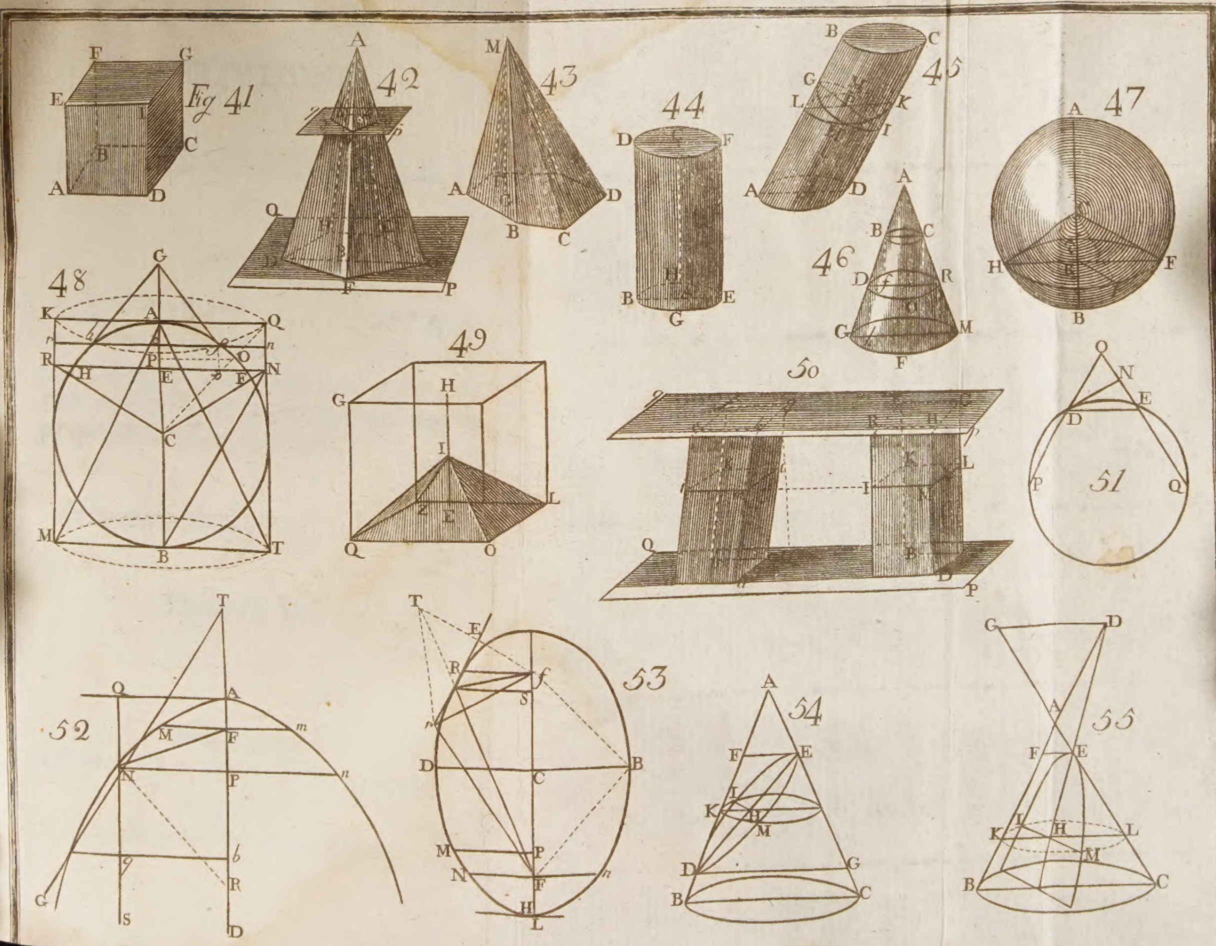
parabolam, cuius parameter $\frac{ab}{c}$ ex antea demon-

stratis evidens est. In hanc autem curva planum secans est alterutri lateri coni parallelum. Itaque quum ex coni sectione natae sint tres illae curvae, patet, cur illis factum sit *sectionum conicarum* nomen. Sed haec breviter dicta sint, ut algebrae usus in geometria tironibus ostendatur.

FINIS GEOMETRIAE ET ALGEBRAE.


Fig. 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22


Fig 23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40


Fig 41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55

INSTITVTIONES

PHILOSOPHICAE

AVCTORE

FRANCISCO IACQVIER
ex Minimorum Familia, primariarum per Europam academiarum socio, in lyceo romano, et in collegio urbano de propaganda fide professore.

AD VSVM SCHOLAE VALENTINAE.

TOMVS IV.

VALENTIAE
EX OFFICINA BENEDICTI MONFORT
CIↃIↃCCC.
SVPERIORVM PERMISSV.

MONITVM AVCTORIS *.

Institutionibus meis philosophicis nunc quintum editis vix finem imposueram, quum perlatis ex Hispania litteris, nuntiatum mihi est, in urbe Valentina, quae celeberrima resplendet studiorum omnium Vniversitate, iussu regio in collegium convenisse doctissimos primarii huius lycei magistros, qui de institutionum philosophicarum publice explicandarum delectu mature deliberarent atque pronuntiarent. Nec sine magna animi voluptate accepi, in has meas institutiones summo omnium consensu universum collegium ultro propendisse; quod quidem testimonium omni

* *Hoc monitum praefigitur a Iacquierio nostro physicae particulari edit. roman. anno 1777. Sed quum sit in universam physicam, heic congruentius ponendum esse visum fuit.*

exceptione maius, mihi magnopere glorioſum, ſummi honoris loco ſemper habebo. Quia vero ſuſpicio oriri poſſet, in phyſicis inſtitutionibus res nonnullas inveniri fortaſſe difficiliores pro tanta, qui ad philoſophiam audiendam Valentiae confluunt, adoleſcentum frequentia; monendum eſſe duxi, hanc ultimam editionem ad ſtudioſae iuventutis captum magis eſſe accommodatam. Tandem ſi contigerit, quod vix crediderim, aliqua ſupereſſe loca impatienti iuventuti moleſta, obſervatum volo, tales propoſitiones, ſi quae ſint, ratiocinatione mathematica non ſolum eſſe demonſtratas, ſed etiam experimentis vel obſervationibus adiutas. Satis ergo eſſe poterit hoc ultimum cognitionis genus iis, qui ſeveras ſpeculationes non curant; atque tali artificio comparatas eſſe mihi facile perſuadeo inſtitutiones phyſicas, ut et iis, qui res faciliores conſectantur, et iis qui ad ſublimiores adſpirant, plurimnm iuvare poſſint. Ceterum hoc meo qualicumque labore et mea propenſiſſima voluntate fruantur ſtudioſi adoleſcentes.

AVCTOR LECTORI.

Ad eam tandem pervenimus philosophiae partem, quae *physica* seu *scientia naturae* appellatur: praestantissimam sane disciplinam. De hoc praeclarissimo studio duas invenio omnino quidem iniustas hominum opiniones. Alii huic studio unice addicti, totique, ut ita dicam, mancipati, in aliis disciplinis haud supra vulgus sapiunt, hanc solam, quam profitentur et amant, scientiam summopere praedicant, cunctaque praeterea doctrinae genera fastidiose contemnunt. Alii physices studium tamquam incertum et inutile arrogantius et temere traducunt; immo velut profanum proscribunt, et ecclesiasticis viris vix concedendum. Primam opinionem, quae quidem error est perniciosissimus, necesse non est, ut fusius refellam. Et certe nemo nescit, ad tria capita generatim revocari omnes, quantum patent, humanas cognitiones. Dei enim et animae nostrae contemplatione, atque corporum, sive naturae observatione studia omnia nostra continentur. Quod ad Dei contemplationem spectat, sacram scilicet theologiam, ¿ecquis aequus rerum stimator divinam hanc scientiam, scientiarum omnium reginam et magistram ceteris omnibus disciplinis infinita laude non anteponat? ¿Ecquis etiam, nisi perditissimus homo, in coelum

non feret sanctiorem illam disciplinam, quae circa nosmetipsos versatur, quae de moribus agit, quae certiori castiorique doctrina praeclaris virtutibus animum excolit, atque ad honestatis, ad officii, ad religionis amorem traducit?

Haec quidem duo sunt divina omnino et omnium longe utilissima studia, quibus ad purissimum omnis veritatis scientiarumque omnium fontem D. O. M. et rerum maiestate et morum sanctitate propius accedere docemur, quoad humani generis patitur imbeçillitas.

Nec tamen sua dignitate et utilitate defraudari debet vera et solida physicae ratio, in qua non infinitae de voculis atque nugis controversiae disceptantur, sed, ut paucis multa complectar, quae coelo, terra marique geri, atque administrari videmus, quantum pro ingenii nostri mediocritate licet, explicantur. Neque haec nuda et simplici mentis contemplatione aut coniecturis inixa, sed accurata ratiocinatione, et captis saepius experimentis demonstrata. Fructuosissimam esse accuratiorem hanc naturae considerationem, eamque ad omnipotentis ac perfectissimi auctoris cognitionem nos evehere, et ad divinas laudes excitare, si quis negaverit, is statim ex sanctae scripturae auctoritate refelletur, atque hanc Isaïae reprehensionem audire merebitur cap. v. vers. 12. *opus domini non respicitis, nec opera manuum eius con-*

ſideratis. Verum qui in contemplandis divinis operibus nullum tempus, nullam attentionem collocat; is ſane physicae pretium omnino ignorat, divinorumque operum gloriam et maieſtatem obſcurius intuetur. Atque ea de cauſa fit, ut aliqui rerum physicarum nihil aut parum ſtudioſi alias quidem philoſophiae partes commendent; physicam autem adſpernentur, in quo quidem non mediocriter peccare videntur. Quam autem ſiniſtra ſit et temere concepta haec opinio, ex ipſa rerum explicandarum ſerie melius quam ſermone ullo licebit intelligere. Interim tamen ſingula harum inſtitutionum capita percurrere, et doçtrinae utilitatem breviter et digito, ut ita dicam, commonſtrare non abs re erit. Ab *extenſione* et *impenetrabilitate* physices generalis initium facere ſolent plerique huius diſciplinae magiſtri. Ego autem ab hac vulgari conſuetudine aliquantulum deflectens, univerſales corporum vires, ſeu potius effectus primum explicabo, et vocabulorum, quibus nulla vis, nulla notio perſaepe ſubiecta eſt, ambiguitatem omnem clara nitidaque definitione amoveri, curabo diligenter. Itaque vim *inertiae*, vires *centripetas* et *centrifugas*, *gravitatem* et *attractionem* accurate conſiderabo, utiliſſimum ſane argumentum, quo cuncta prorſus naturae effecta continentur. Hinc doctrinae ordo poſtulat, ut effectus ipſos inde oriundos, aequilibrii ſcilicet, va-

riorumque motuum leges contemplemur. Ex his tamen veluti gradibus deducimur ad universales corporum proprietates, quae physicae generalis meta sunt ac terminus. Maxima sane voluptate adficiuntur adolescentum animi, quum tot admiranda acutissimorum hominum inventa cognoscent, quibus physica maximum cepit incrementum, et quamplurima ad usus vitae excogitata. Haec autem tot tantaque commoda fusius declarare supervacaneum est. Singulis enim capitibus sua adiungitur appendix, in qua uno veluti intuitu observare licebit, non quidem utilitates omnes, (sunt enim innumerabiles) sed aliquas tantum, atque etiam in rebus theologicis, quem quidem usum vix suspicantur aliqui. Hanc vero tradendae physicae rationem nemo, ut puto, improbabit; quum praeclarissimi studii amorem studiosae iuventuti instillare possit, quantum unicuique pro vivendi instituto et ratione licet. Sua enim sunt diversis vitae conditionibus officia, quibus deesse nefas.

Vniversalibus corporum proprietatibus in physica generali explicatis, iam progrediendum est ad physicam particularem, in qua varia specierum individua observantur, variaeque species considerantur. Latissime quidem patet physicae particularis amplitudo, naturamque omnem amplectitur. Sed tot tantaque scire datum non est mortalibus: in tam

immensa rerum varietate physicis pauca, ut ita dicam, delibare licet. A corporum *fluiditate* physices particularis sumam exordium: corporum fluidorum *pressionem*, *motum*, *resistentiam* explicabo. Ad fluida *elastica* deinde progressum faciam, *aërisque* proprietates considerabo. Iam rectus docendi ordo exigere videtur, ut *luminis* doctrinam, variasque adfectiones statim subiungam. Ex his autem ad corpora *coelestia* adsurgam, doctrinamque astronomicam et varias illius partes sedulo explanare conabor. Neque praetermittam, quae cum astronomia necessario vinculo coniuncta sunt, *chronologiae* et *kalendarii* elementa variasque *cyclorum* et *periodorum* rationes accurate demonstrabo. Ita autem tellus nostra cum coelo colligata est, ut de *geographia* sine astronomiae subsidio vix quidquam statui possit. Itaque ex astronomia ad geographiam, et ut ita dicam, e coelo in terram pedem referam. Igitur quum astronomia stricte connecti debent chronologia et geographia, quas astronomiae *filias* merito appellant aliqui. Explicata geographia suadet ipsa rerum naturaeque series, ut corpora illa, quae in telluris superficie oculis nostris obversantur, primum consideremus, deinde vero ad ea, quae in terrae gremio latent, descendamus. Quare de *animalibus*, *arboribus*, *plantis*, *metallis*, *fossilibus*, aliisque id genus plurimis distincte sermo habebitur. Tandem quia

ex ipsis terrae visceribus perpetuo avolant plurima, magna quidem varietate, effluvia, quae in aërem sublata, varias constituunt phaenomenorum species; ea denique contemplabimur, quae in aëris regione aguntur, *imbres* scilicet, *grandinem*, *nivem*, *ventum*, *tonitrum*, aliaque *meteora*, et physicae particulari, Deo iuvante, finem imponemus. Singulorum capitum utilitatem suo loco opportune adiungemus, ut factum est in physica generali. Interea tamen, ut alia plurima omittam huius doctrinae emolumenta, quae omnibus obvia sunt; unum heic attingere satis erit, quod nostris auditoribus theologiae studiosis, maxime convenit, astronomiae et chronologiae doctrinam cum historia sacra et profana consotiandam esse. Si quis in dubium vocaverit, excellentes de his rebus evolvat libros: suam in gravissimis etiam magnique momenti controversiis, imperitiam, si ingenuus fuerit, fateri non dubitabit. Ceterum ex iis, quae hactenus breviter attigi, satis intelligitur, quos mihi lectores velim, eos scilicet arithmeticae et geometriae elementis probe imbutos esse oportet. Vt autem prae manibus ea omnia habeant, quae ad nostras institutiones sunt necessaria, arithmeticam et geometriam tali studio adornavi, ut nihil nimis, et nihil minus, quam necesse sit, contineant. Verum aliud a studiosis adolescentibus maxime exoptarem, ut arithmeticam et geometriam lo-

gicae etiam studio praemitterent. Etenim arithmeticae et geometriae principia ob firmam et perpetuam veritatis possessionem aptissima sunt ad mentis aciem expoliendam, logicam naturalem perficiendam, rectamque methodum conciliandam.

Nec me reprehendat aliquis, quod hac nostra aetate, his cultioris sublimiorisque physices temporibus, minus difficiles institutiones tradere et proponere audeam. De me quidem modeste, ut par est, sentio, non tamen nimis demisse, quod quidem fictae et adfectatae, quam abhorreo, foret humilitatis. At in reconditiori physica me omnino peregrinum et hospitem non esse, demonstratum confido; et iis, quae iam edidi operibus et aliis, quae apud me premo, possem confirmare. Verum doctos quidem se probant illi physicae magistri; qui intricatissima physica *theoremata* tironibus explicare, laborant; mea tamen sententia, rem faciunt non valde utilem; praesertim si frequentior sit auditorum numerus, et adolescentium mentes doctrinae difficultate magis obruere, quam erudire videntur.

Sed quidquid sit de nostrarum institutionum successu, meam saltem propensissimam voluntatem benigne excipiant studiosi adolescentes, quorum utilitati hunc meum qualemcumque laborem sincere et ex animo consecravi. Porro ab iis hunc unum solumque expetendum vehementer exopto operae meae fru-

etiam, ut nempe utilissimum studium alacriter suscipiant, non quidem ad gloriam et doctrinae ostentationem, sed ad tuendam insinuandamque religionem. Neque tamen respuenda est doctrinae fama, dummodo inde absit gloriae, honorum et lucri cupiditas. Persaepe enim feliciter contingit, ut vulgaris etiam, nec admodum sublimis rerum physicarum cognitio apud gentes minus cultas nominis splendorem atque auctoritatem conciliet. Hac fortunatissima oblata occasione utendum est, et de religione sermones miscendi. Hae quidem honestae sunt, et omnino licitae artes. Sed tamen praecedat morum vitaeque exemplar, atque enixe imploretur divinae gratiae auxilium. Nam, ut ait S. Augustinus in epistola ad Sixtum: *restat, ut ipsam fidem, unde omnis iustitia sumit initium, non humano tribuamus arbitrio, nec ullis praecedentibus meritis . . . sed gratuitum Dei donum esse fateamur.*

Antequam ex hoc sermonem ad physicam transitum faciam, monendum superest, pro maiore commoditate, modo telluris motum, modo quietem a me adhiberi. Ceterum me obedire profiteor sanctae romanae ecclesiae, quae sapientissime omnino prohibuit, ne hypothesis copernicana tamquam *thesis* defenderetur.

LECTORI.

Iacquierius noster, quum institutiones suas philosophicas quintum Romae ederet an. 1777, atque editio ad finem paene perducta esset, tum primum cognovit, eas plenis professorum valentinorum calculis probatas, ut tironibus philosophia imbuendis traderentur, et in monito, quod physicae particulari praefixit, ingenue testatus est, dubium sibi fuisse, utrum *illae pro tanta, qui ad philosophiam audiendam Valentiae confluunt, adolescentium frequentia ad studiosae iuventutis captum accommodatae essent.* Testimoniis etiam fide dignis accepimus, Virum doctum vehementer doluisse, quod in institutionibus elucubrandis non eam, quam vellet, operam posuisset, urgentibus superiorum mandatis de illis quantocius evulgandis, quodque nec satis esset firma valetudine, nec eo aetatis robore, ut illas ad incudem denuo revocare et perficere posset. Profecto qui institutiones iacquierianas attenta mente perlustraverit, facili negotio deprehendet, sapientissimum Newtoni Commentatorem obedientiae potius quam suae famae

consuluisse. Hinc factum puto, ut in physica se ipsum interdum ex commentariis newtonianis, interdum etiam caillianas lectiones elementares exscripserit. Quae traduntur *pp.* 216, 217, 218 *in respons. ad obiect.* 4. *art.*3 *cap.* 1 *part.* 1 *sect.* 2 iisdem verbis exscripta sunt *ex comment. newtonianis corol.1 prop.7 theor. 7. lib. 3 princ. mathem.* Isaaci Newtoni, excepta figura, quam male expressit iacquierianus caelator. Formulae praeterea, quibus totam paene opticam, catoptricam, et dioptricam absolvit Iacquierius, ex Caillii *lectionibus element.* desumtae sunt, praesertim *ex part.* 2. *catopt. et diopt. cc.* 2. 3. Ex his autem (libere dicam, quod sentio) pars supra quam institutiones patiantur, abstrusa sunt; pars vero lacera atque indigesta, cum reliquis doctrinae ordine parum connexa, nec iacquieriano stylo et methodo cohaerentia.

Igitur quod Iacquierius expetierat, neque tamen opere complere potuit; id ego, quum operis recusionem, iubente Gymnasiarcha, curandam suscepissem, quantum per temporis augustias licuit (urgebat enim editio, quod exemplaria deessent) ut scholae nostrae pro virili inservirem, exsequi enixus sum. Id vero praestiti. Nonnulla sublimia abstrusaque, quamquam a tironibus omitti debeant, quum tamen iacquieriana sint, intacta suis locis reliqui, ne Auctori quidquam subtraherem, ratus, a perito magistro etiam omittenda, qui

probe noverit, quid auditorum suorum *valeant humeri, quid ferre recusent.* Alia vero, quae praeter quam quod difficilioribus formulis implicata, non iacquieriana sed cailliana sunt, penitus expunxi, simplicioremque substitui doctrinam diverso charactere exaratam, qua tironum mentes informari, et suaviter accendi possunt ad abditiora physices adyta penetranda. Breves item animadversiones imis pagulis adieci, quibus obscura aliqua aperirem, Auctorisque oscitatiunculas interdum castigarem. Institutiones physicas methodo mathematica, quoad potui, salva operis integritate digessi, quum elegantiae intelligendique facilitati plurimum illa conferat. Pari consilio iacquierianam doctrinam schemmatum penuria obscuram novis schemmatis illustrare operae pretium duxi, quibus tironum imaginatione adiuta doctrinae medullam penitius intellectus calleret. Errores formularum typorumque sphalmata, quae in physica immane quantum excreveram, correxi; textumque depravatum legitimo, ut mihi quidem videbatur, restitui, textus serie typorumque charactere plerumque non mutatis, ne nimis meticulosus viderer. Nihil demum praetermisi, quod intra breve excudendi operis tempus ingenii mei vires valuerunt, ut iacquierianam physicam, ceteroqui multis nominibus commendabilem, in gratiam iuventutis illustrarem, faciliorem que redderem.

Neque enim recensitis naevis praeclaro Auctori detrahere volui, qui in his ipsis institutionibus eximium sese philosophum praebet. Non ego paucis offendor maculis, ubi plura nitent. Mira ubique lucet iudicandi severitas et gravitas in exstirpandis levibus futilibusque opinionibus, quibus etiam aliquando indulgent recentiores philosophi. Huic adfinis nec inferior est piissimi viri modestia animique candor, quem etiam ubique lectoribus instillare satagit: praestantissimorum inter recentiores philosophorum exemplum imitatus, qui quo magis naturae indagationes amplificarunt, eo magis suam plurimis in rebus ignorantiam et humani ingenii tenuitatem agnoverunt, summique Dei sapientiam maiestatemque admirati sunt. Modestiae fructus est pietas erga Deum et catholicam fidem plane singularis, quae ubique in iacquierianis institutionibus apparet, quaeque saepissime adolescentes ad virtutum officia excitantur. Haec igitur mea de studiosa valentina iuventute benemerendi studia te L. O. minime improbaturum spero. Vale.

INDEX.

FROOEMIVM.

CAPVT I. *De natura et diviſione phyſices.* Pag. 1

CAPVT II. *De regulis philoſophandi.* 7

REGVLA I. *Cauſae rerum naturalium non plures admitti debent, quam quae et verae ſunt, et earum phaenomenis explicandis ſufficiunt.* ibid.

REGVLA II. *Ideoque eff. ctuum naturalium eiusdem generis eaedem adſignandae ſunt cauſae, quatenus fieri poteſt.* 8

REGVLA III. *Qualitates corporum, quae intendi et remitti nequeunt, quaeque corporibus omnibus competunt, in quibus experimenta inſtituere licet; pro qualitatibus corporum univerſorum habendae ſunt.* 11

REGVLA IV. *In philoſophia experimentali propoſitiones ex phaenomenis per inductionem collectae, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, pro veris aut accurate aut quam proxime haberi debent; donec alia occurrant phaenomena, per quae aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiae.* 13

PARS PRIMA PHYSICES.

SECTIO I. *De universalibus corporum viribus.* 15
CAPVT I. *De vi inertiae plurimisque inde colligendis physices principiis.* 16
ARTIC. I. *De vera notione et exsistentia vis inertiae.* ibid.
CONCLVSIO. *Demonstratur vis inertiae.* 20
ARTIC. II. *De principio actionis et reactionis.* 31
CONCLVSIO. *Reactionem actioni contrariam et aequalem esse demonstratur.* 32
ARTIC. III. *De virium compositione.* 39
APPENDIX. *De quibusdam capitis praecedentis utilitatibus.* 50
CAPVT II. *De vi attractionis variisque illius speciebus.* 55
ARTIC. I. *De attractione generatim considerata.* 56
CONCLVSIO. *Vniversalem inter corpora omnia attractionem demonstrant phaenomena.* 61
ARTIC. II. *De prima attractionis lege.* 73
CONCLVSIO. *Attractionis universalis lex est, ut corpora omnia sese attrahant in ratione directa massarum et duplicata inversa distantiarum.* 78
ARTIC. III. *De altera attractionis specie.* 89

Conclvsio. *Praeter attractionis legem in ratione distantiarum duplicata decrescentem, admittenda est lex alia in ratione plusquam duplicata deerescens.* 94

Appendix. *De quibusdam capitis praecedentis utilitatibus.* 105

Capvt III. *De gravitate constanti.* 115

Artic. I. *De gravitatis terrestris adfectionibus praecipuis.* 116

Artic. II. *De causa gravitatis.* 125

Conclvsio. *A vortice cartesiano repeti non potest gravitatis causa, neque ab ullo impellente fluido, quod easdem cum fluidis cognitis proprietates habeat.* 129

Artic. III. *De centro gravitatis.* 141

Appendix. *De quibusdam capitis praecedentis utilitatibus.* 158

Sectio II. *De reliquis universalibus corporum proprietatibus ex virium notione derivandis.* 169

Capvt I. *De motu in genere variisque illius speciebus.* ibid.

Artic. I. *De motu generatim considerato.* 170

Artic. II. *De rectilineo corporum descensu.* 177

Artic. III. *De motu curvilineo.* 188

Conclvsio. *Gravitatis terrestris inaequalitatem demonstrant accuratissime instituta pendulorum experimenta.* 201

De Cycloide. 223
ARTIC. IV. *De Corporum conflictu.* 226
De computatione virium corporum motorum. 243
APPENDIX. *De quibusdam capitis praecedentis utilitatibus.* 249
CAPVT II. *De extensione et reliquis inde pendentibus corporum proprietatibus.* 259
ARTIC. I. *De extensione penetrabili.* 260
CONCLVSIO I. *Validissimis rationibus probatur vacuum.* 262
CONCLVSIO II. *Corpora omnia innumeris poris pertusa esse, demonstratur.* 275
ARTIC. II. *De extensione impenetrabili.* 282
CONCLVSIO. *Extensionem quamlibet geometricam in infinitum divisibilem esse, demonstratur.* 287
ARTIC. III. *De figurabilitate.* 300
CONCLVSIO. *De perfecta minimarum particularum duritie diversaque illarum natura nihil adfirmandum videtur.* 309
ARTIC. IV. *De corporis natura.* 320
APPENDIX. *De quibusdam capitis praecedentis utilitatibus.* 328

INSTITVTIONES PHYSICAE.

IN VNIVERSAM PHYSICAM *PROOEMIVM.*

CAPVT I.

De natura et divisione physices.

I.

DEFINITIO I.

PHYSICA dicitur: *illa philosophiae pars, quae corporis naturalis proprietates expendit.* In hac autem definitione probe notari debent verba *corporis naturalis*, quae quidem apposite omnino dicta fuere, ut quaestiones plurimae, quae in sacra theologia opportunius tractantur, ad hanc divinam scientiam reserventur. Itaque quidquid in corporibus praeter consuetum naturae ordinem, et per miraculum contingit, physicorum contemplationi et disputationi subiacere non debet. Hinc physica definiri etiam solet *philosophia naturalis* vel *scientia naturae.*

Definitio II. Duplicis generis proprietates in corporibus generatim distinguuntur. Aliae

sunt proprietates omnibus corporibus communes, quae nempe deprehenduntur in omnibus corporibus, quae nostris experimentis vel observationibus subiici possunt, atque ideo proprietates illae dicuntur *universales*. Aliae autem proprietates in certis dumtaxat corporum speciebus observantur. Rursus autem proprietates universales vel eaedem in corporibus perpetuo manent, vel per gradus crescunt atque decrescunt, hoc est, ut loquuntur scholastici, *suscipiunt magis vel minus*. Ad primam proprietatum universalium classem pertinent *extensio, impenetrabilitas, vis inertiae, motus, quietis et figurae possibilitas*, sive ut vulgo dicitur, *mobilitas, quiescibilitas et figurabilitas*. Ad secundam classem referuntur *vis gravitatis et vis attractionis*; has enim vires secundum certam legem variare, demonstrabimus. Quod spectat ad proprietates speciales; eas scilicet, quae certis dumtaxat corporibus conveniunt, has enumerare non licet; tot enim sunt, quot diversae corporum species. Ad proprietatum illarum ordinem pertinent *fluiditas*, *elasticitas, pelluciditas* cet. Heic autem cavendum est, ne proprietates universales cum essentialibus confundantur. Fieri enim potest, ut in corporibus certas perpetuo observemus qualitates, quae tamen ad ipsam corporum essentiam non pertineant. Itaque monendi sunt studiosi adolescentes, ut corporum proprietates illorumque effectus accu-

rate contemplentur; quaestiones autem scholasticas, quae de proprietatibus essentialibus agitari solent, non multum curent. Ex his enim nihil vel parum utilitatis sperandum est. Huius moniti rationem explicavimus in logica.

Definitio III. Pro duplici proprietatum genere duplex est physicae pars. Alia est physica *generalis*, quae universales corporum proprietates considerat; alia autem est physica *particularis*, quae certas dumtaxat corporum species expendit. Ex hac divisione patet, amplissimum esse physicae campum, et ad omnes fere scientias naturales extendi. Quia vero tam multa scire datum non est mortalibus pro temporis brevitate et humani ingenii limitatione; vastissimum illud argumentum intra iustos limites coërcere solent cultiores physici. Itaque in physica generali explicabimus universales corporum proprietates. Deinde ad physicam particularem gradum facientes, eas primum considerabimus praecipuas corporum species, quae per experimenta nobis innotescunt, et tandem ad remotiora corpora adsurgemus, quae observationibus quidem, non autem experimentis subiici possunt. Sed haec generatim dicta sint de physices divisione. Singula enim huius divisionis capita suo ordine deinde rursus dividemus et explicabimus.

Definitio IV. Physica sive generalis sive particularis vel est *experimentalis* vel *theoretica*. Physica experimentalis ea est: *quae*

corporum proprietates et effectus experimentorum atque observationum ope ostendit. Physica autem theoretica ea dicitur: *quae non solum experimenta et observationes adhibet, sed iis etiam ad inveniendos vel explicandos naturae effectus ratiocinando utitur.* Probe autem distingui debent observationes et experimenta. Si nempe quidpiam attentius speculamur, quod natura nulla vi artis coacta demonstrat, ille speculandi actus non *experimentum* sed *observatio* appellatur. Contra autem physicum experimentum est tentamen, quo artificis industria atque opera exploratur, et ob oculos ponitur aliqua naturae actio, quae antea latebat, et lateret postea, nisi eadem a natura velut invita per artem exprimeretur. E.g. coelum obducitur nubibus, nulla nostra opera interveniente: si ergo nubes praesentes attente intuemur, coelum nubibus obductum *observare* dicimur. At si ope antliae pneumaticae ex globo metallico cavo aër educitur, ut deinde globus ad stateram appensus examinetur, *experimentum* facere dicimur. Quia vero *phaenomenum* appellatur id omne, quod sensibus conspicuum est, patet, experimentis et observationibus commune esse phaenomeni nomen.

II. Ex his intelligitur, quid inter physicam pure experimentalem et physicam theoreticam intercedat. Experimentum *ratio* non est sed *factum*, et vi experientiae tantum-

modo cognoscitur, effectum aliquem ita se habere. At per physicam theoreticam non solum effectus causa explicatur, sed etiam veritates universales colliguntur, et in re aliqua data in quolibet simili casu conclusiones statuuntur. Itaque physica experimentalis est physica *factorum*; physica autem theoretica est *factorum* explicatio. Hinc ut sua laus unicuique iuste tribuatur, physica mere experimentalis commendari quidem debet, sed manus magis quam ingenii dexteritatem postulat. Atque optandum maxime foret, ut qui manuum industria pollent, solam experientiam tractarent; alii vero, qui meliori nobiliorique sagacitate, ingenii scilicet, praediti sunt, partem theoreticam sibi adsumerent, et ita coniunctis viribus ad physices progressum conferrent.

III. Quamvis physica theoretica in effectibus explicandis occupata sit; cavere tamen maxime debent physici, ne effectuum causas temerario proferant. Igitur ut totus physicae scopus intelligatur, quid *causae physicae* vocabulo significari velim, clare exponam. Deus est prima et unica rerum omnium causa. Verum antequam ad primam alicuius effectus causam perveniamus, plurimae aliquando percurrendae sunt intermediae causae ita, ut effectus alicuius causa non tam causa dici debeat, quam effectus alius, qui suam quoque habet causam, donec tandem

perveniamus ad effectum, qui nullam agnoscat causam praeter Deum vel ipsam corporum naturam. Rem exemplo illustrabimus. Gravium descendentium legem accurate demonstrant physici: huius descensus causa est *gravitas*, quam velut effectum ex alia causa oriundum considerant plurimi physici. Itaque licet corporum descensus proxima causa nota sit, gravitas nempe; ignota tamen est causa remota sive causa gravitatis. Quare ut plurimum sistendum est in causis proximis, nec remotiores causae adferri debent, nisi fuerint perspicue cognitae. Inde autem fit, ut in rebus physicis multa confusio persaepe oriatur. Quae quum ita sint, iam evidens est, in physica theoretica confidenter ostendendas non esse causas ultimas, sed satis esse proximas vel remotas, quae clare innotescere possunt. Et quidem ulterior cognitio exiguae admodum est utilitatis. Si enim descensus leges demonstraverit physicus, si effectus gravitatis aestimare, et ad calculum revocare noverit; eadem in humanam societatem redundat utilitas, etiamsi gravitatis causa nos lateat. Itaque probe tenendum est, eum esse debere melioris physicae scopum, ut nempe varii effectus probe observentur, accurate aestimentur, et ad nostram utilitatem transferantur. Vt autem hunc scopum pro mea tenuitate attingam, singulis physices capitibus in varios articulos se-

eundum methodi regulas opportune dividendis appendicem adiungam de uniuscuiusque capitis utilitate vel in artibus vel in aliis etiam disciplinis.

CAPVT II.

De regulis philosophandi.

Quattuor primariis regulis comprehendi solet universa philosophandi ratio, quas quidem regulas, utpote in rebus physicis utilissimas, fusius explicabimus.

REGVLA PRIMA.

Cavsae rervm natvralivm non plvres admitti debent, qvam qvae et verae svnt, et earvm phaenomenis explicandis svfficivnt.

Haec regula multas complectitur partes seorsum declarandas. Et 1.° quidem oportet, causam esse veram, ideoque excludi debent non solum causae commentitiae, quas exsistere repugnat, sed etiam causae mere possibiles. Itaque satis non est, ut causa aliqua possit exsistere, sed etiam oportet, ut re vera exsistat. Licet igitur philosophicarum hypotheseon absurditatem et repugnantiam demonstrare non possimus, si tamen nulla ratiocinatione, nullis experimentis aut ob-

servationibus probari possint, eas e physica longe exsulare iubemus. Ceterum hanc primam regulae partem ex aliis sequentibus regulis clarius licebit intelligere. II.° Oportet, ut causa sufficiat; hoc est, singulis effectus explicandi partibus et circumstantiis debet satisfacere; alioqui tota non haberetur effectus causa. III.° Tandem non plures admittendae sunt causae, quam quae satis sunt. Etenim receptum est in omnibus disciplinis principium: *entia non sine necessitate esse multiplicanda; nec fieri debere per plura, quod potest fieri per pauciora.* Ceterum evidens est, huic regulae praemittendam esse certissimam effectus cognitionem, nec adgrediendam esse, quod tamen persaepe fit, effectus alicuius explicationem, nisi effectum ipsum exsistere certo constiterit. Ita Plutarchus olim hanc sibi propusuerat quaestionem: *cur pulli equini, si á lupis fuerint insectati, velocius currere soleant.* Variis explicationibus quaesitis veram tandem solutionem proponit: *sed id*, inquit, *fortasse verum non est.*

REGVLA SECVNDA.

IDEOQVE EFFECTVVM NATVRALIVM EIVSDEM GENERIS EAEDEM ADSIGNANDAE SVNT CAVSAE, QVATENVS FIERI POTEST.

Haec secunda regula, quae *analogia na-*

turae solet appellari, ex prima facile derivat. Etenim (*per primam regulam*) natura simplex est et sibi semper consona, neque superfluis causis redundat. Porro effectus eiusdem generis sive omnino similes diversis causis tribui, naturae simplicitati omnino repugnat. Ita gravium descensus in Europa et America eidem causae tribuendus est. Pari ratione quum in omnibus hominibus eadem respirationis instrumenta demonstrent observationes anatomicae; eamdem esse in singulis respirandi causam, merito concludimus. Nulli exceptioni obnoxia esse potest haec regula. Quod autem incautos philosophos in errorem aliquando inducat, id fit ex ipsius regulae abusu. Praecipiti nempe iudicio persaepe credimus, similes esse effectus, qui tamen sunt inter se diversissimi. E. g. venti praeseferunt analogiam quamdam, ventosque singulos, tamquam effectus eiusdem generis facile sibi persuaderet, qui singulas circunstantias, variasque conditiones accurate non consideraret. Cavendum ergo est diligenter, ne ex characteribus mere externis de perfecta effectuum similitudine audacter pronuntiemus. Ita plantae quaedam lethales externam plantarum salubrium speciem imitantur, sed principio quodam interno et non facile conspicuo inter se maxime differunt. Saepe etiam miramur improvisum alicuius causae effectum, alium pla-

ne diversissimum exspectantes. Haec autem effectuum diversitas proculdubio tribui debet causarum varietati et subtilissimae conditioni nobis imperviae. Itaque id summopere curandum est, ut nempe certo compertas habeamus omnes effectuum partes conditionesque singulas. Si autem eo pervenire liceat, iam regula extra omnem dubitationem posita est. Immerito igitur huius regulae vim enervare conantur aliqui philosophi. Re quidem vera si de effectuum perfecta similitudine vel minimum supersit dubium, errori obnoxia esse potest analogiae regula, atque haberi in hoc casu certissima veritatis norma non debet. Quamvis autem analogia demonstrationis vim non semper obtineat; attamen tantam conciliat probabilitatem, ut non solum in rebus physicis, sed etiam in tota fere vivendi agendique ratione sine stultitia reiici non possit. Ita si domus hodie stet firmissima, crastina die sine ullo timore eamdem domum ingredi possum, si nullum appareat ruinae indicium; quamvis tamen fieri possit, ut ob causam aliquam latentem praeceps ruat aedificium. Huic regulae innituntur pleraeque hominum actiones. Etenim actiones suas secundum experientiam moderantur sapientes homines: in gravissimis negotiis experientia magistra utuntur: et quid agendum sit in casu singulari, iudicant ex eo, quod factum fuit in alio casu praeteri-

to, cui praesens similis est vel apparet. Manifestum autem est, hanc agendi rationem nihil esse nisi perpetuum huius regulae usum.

REGVLA TERTIA,

Qvalitates corporvm, qvae intendi et remitti neqvevnt, qvaeqve corporibvs omnibvs competvnt, in qvibvs experimenta institvere licet; pro qvalitatibvs corporvm vniversorvm habendae svnt.

Haec regula, qua universa physica tamquam fundamento innititur, ex analogia naturae evidens est. At non sine maxima diligentia adhiberi debet. Et 1.° quidem satis non est, experimenta in paucis corporibus haberi, sed in maximo corporum numero institui debent. Praeterea etiam requiritur, ut qualitates illae incerta lege non augeantur neque minuantur. Qua enim ratione decrescerent, possent quoque minui in infinitum, atque tandem omnino evanescere. At si qualitates certa lege crescant et decrescant; quales sunt *gravitas* et *attractio*; iam qualitates illae in omnibus corporibus observatae pro universalibus corporum qualitatibus haberi debent, certis tamen gradibus crescentes et decrescentes. Hinc patet quodnam sit discrimen inter qualitates, quae sine ulla

lege augentur atque minuuntur, et qualitates alias, quae certa lege crescunt atque decrescunt. E. g. calor incertis gradibus crescit atque decrescit; verum gravitas et attractio certam servant distantiarum legem, quam deinde considerabimus. 11.° Inter proprietates universales aliae distinguendae sunt, quae non solum per experimenta innotescunt, sed etiam ex ipsa corporis notione colliguntur, aliae autem per sensus tantum atque experimenta adquiruntur. Quod spectat ad primi generis qualitates, evidens est, illas competere singulis corporibus, iis etiam, quae sensuum potestatem et vim omnem fugiunt. Quod autem attinet ad qualitates alias per sensus tantum adquisitas, aud pari iure ad corpora quaelibet transferri possunt. Quod quidem monitum volui, ut altercationes omnes philosophicas effugerem. In nostris enim institutionibus physicis nihil adfirmare volo, nisi quod omnino negari non potest ab iis, qui rem probe tenent atque intelligunt. Ita quum non desint philosophi, qui simplicissima admittunt materiae puncta, indivisibilia, inextensa, quae omni carent figura; licet qualitates illas in omnibus observemus corporibus, quae sub sensus cadere possunt, minus tamen accurate easdem proprietates transferre liceret ad puncta materiae, quae sensuum nostrorum limites excedunt; nisi aliunde qualitates illae ex ipsa

corporis notione colligantur, metaphysicisque argumentis comprobentur. Sed hac de re fusius disserere ad praesentem locum non pertinet. Interim monere satis sit, praesentem regulam eo, quem dixi, modo explicatam in dubium vocari non posse. ¿Qua enim ratione adfirmamus extensa, gravia cet. esse corpora, quae in terrae gremio alte delitescunt, nostrisque experimentis subiici non possunt, nisi vi huius regulae? Et certe non sine summa insipientia aliquis negaret universales corporum proprietates, nisi eas in corporibus singulis manibus tractasset, suisque experimentis comprobasset.

REGVLA QVARTA.

IN PHILOSOPHIA EXPERIMENTALI PROPOSITIONES EX PHAENOMENIS PER INDVCTIONEM COLLECTAE, NON OBSTANTIBVS CONTRARIIS HYPOTHESIBVS, PRO VERIS AVT ACCVRATE AVT QVAM PROXIME HABERI DEBENT; DONEC ALIA OCCVRRANT PHAENOMENA, PER QVAE AVT ACCVRATIORES REDDANTVR AVT EXCEPTIONIBVS OBNOXIAE.

Hac ultima philosophandi regula statuitur, hypothesibus quibuscumque anteponendas esse propositiones ex observationibus et experimentis collectas. Et quidem quum hy-

potheses mera sint ingenii figmenta, evidens est, propositiones, quae aliqua observationum vel experimentorum auctoritate nituntur, praeferendas esse puris hypothesibus, quae nullam habent nisi ipsius ingenii fingentis auctoritatem. Ex hac ratiocinatione manifestum etiam est, inductionibus, quae ex phaenomenis derivantur, iustam probabilitatem tribuendam esse. Eo scilicet accuratior censeri debet inductio, quae plura sunt phaenomena, quibus satisfacit. Si consentiat cum plurimis, habenda est quam proxime vera, si cum omnibus, vera est accurate; si autem contraria occurrant phaenomena, restringi debet inductionis veritas. Ad hanc regulam referuntur ea omnia, quae de opinionum probabilitate et hypotheseon usu explicavimus in logica. Quare non est, quod huius regulae explicationi diutius immoremur.

PARS PRIMA PHYSICES SEV PHYSICA GENERALIS.

SECTIO I.

De universalibus corporum viribus.

Ab extensione et impenetrabilitate physices initium sumere solent plerique philosophi. At quum virium doctrina ad universales alias corporum proprietates detegendas atque explicandas breviorem tutioremque viam aperire videatur; a vulgari physicae tradendae methodo mihi deflectendum esse existimavi. Heic autem de viribus rursus monendum est, quod de causis iam diximus, nempe, *vis* nomine nihil aliud intelligimus, nisi effectum aliquem dato aliquo tempore productum. Nec leviter quidem attingere volumus inanissimas quaestiones de virium natura; an sint *entitates* aliquae corporibus inhaerentes, an quod-

libet aliud. Itaque ne profligatas veterum scholasticorum qualitates occultas in scenam revocare videamur, haec definitio nominis probe tenenda est. Et quidem unusquisque facile experitur, sibi nullam esse virium notionem, nisi effectum aliquem sibi repraesentet. Porro quamvis haec sectio de corporum viribus inscribatur, saepe tamen data occasione per alias corporum proprietates excurremus; si nempe rerum perspicuitas et doctrinae ordo id postulaverint.

CAPVT I.

De vi inertiae plurimisque inde colligendis physices principiis.

ARTICVLVS I.

De vera notione et existentia vis inertiae.

Definitio I. Vis inertiae dicitur: *illa proprietas, qua corpora statum suum vel motus vel quietis perpetuo tueri conantur* *.

* *Vim inertiae Newtonus cum aliis physicis vocant vim materiae insitam seu innatam, ut litigia declinent, quae ex vi significationis grammaticalis nominis* inertiae *oriri possent.*

Huius definitionis partes singulas explicabimus. Non solum corpora statum suum quietis perpetuo servant, seclusis viribus quibuslibet impressis, quod quidem a nemine in dubium vocatur, sed etiam seclusis omnibus impedimentis statum motus perpetuo retinent, hoc est, si corpus moveatur, moveri perget in infinitum eadem semper velocitate et in linea recta, nisi causa aliqua corporis directionem et velocitatem turbaverit. Vim illam in corporibus non sentimus, nisi illorum statum mutare conemur.

Defin. II. Ille autem conatus ad mutandum corporis alicuius statum, dicitur *actio*. At conatus, quo corpus aliquod status mutationi resistit, vocatur *resistentia* vel *reactio*. Itaque vim inertiae tamquam mere *passivam* habere possunt physici, qui vis passivae nomine eam vim intelligunt, quae ex se nullum exserit effectum, nisi a vi alia excitetur. Sed res est levioris momenti, et de nomine minime litigandum est. At vis inertiae confundi non debet cum vulgatissimo scholasticorum principio de *indifferentia materiae ad motum et quietem*. Hoc enim principio nihil aliud intelligendum videtur, nisi ad essentiam materiae non pertinere, ut perpetuo moveatur vel perpetuo quiescat. At inde nullatenus colligitur, in motu vel quiete perpetuo non manere corpus, quod movetur vel quiescit, seclusis omnibus impedimentis.

Defin. III. Vt tota haec doctrina in bono lumine collocetur, pauca de motu praemittenda sunt, fusius deinde explicanda. Quamvis ita clara sit ac perspicua motus notio, ut nulla definitione indigeat; a physicis tamen definiri solet motus: *continua et successiva loci mutatio.* Heic autem locum generatim consideramus, et abstrahimus a loco *absoluto* vel *relativo*, ac proinde etiam a motu *absoluto* vel *relativo.*

Defin. IV. Velocitas dicitur: *illa corporis adfectio, qua datum aliquod spatium dato tempore percurrit.* Rursus velocitas dicitur *uniformis* sive *aequabilis*, si aequalibus temporibus aequalia spatia describantur; secus autem *variabilis* appellatur. Inde autem plurima fluunt consectaria, quae quidem sunt per se manifesta.

Corollar. Si velocitas uniformis fuerit duplo vel triplo maior cet. erit spatium eodem tempore descriptum duplo vel triplo maius cet. Ac proinde velocitates *in motu uniformi* sunt directe, ut spatia. Contra autem si maneat idem spatium, exsistente velocitate duplo vel triplo maiori cet. erit tempus duplo vel triplo minus cet. Ideoque *velocitates in motu uniformi sunt reciproce, ut tempora.* Quare generatim si spatium dicatur S, velocitas V, tempus T; erit $V = \frac{S}{T}$ et $TV = S$, hoc est: *in motu uniformi spatia*

sunt in ratione composita velocitatum et temporum.

Defin. V. His autem praemissis facile intelligitur, quid sit *quantitas motus*. Si corpus aliquod moveatur, singulas eiusdem corporis particulas eadem velocitate moveri necessum est. Si enim aliae irent tardius, aliae velocius; iam solveretur partium nexus, nec corpus maneret continuum, quod est contra hypothesim. Porro quantitas motus nihil aliud est, quam adgregatum seu summa omnium velocitatum. Quare evidens est, quantitatem motus esse productum ex numero partium sive ex quantitate materiae in velocitatem communem. Si igitur duorum corporum velocitates dicantur V, v, quantitates materiae M, m, spatia iisdem temporibus motu uniformi percursa S, s, quantitates motus Q, q; erit $Q : q = MV : mv = MS : ms$. Sunt enim velocitates, ut spatia iisdem temporibus descripta. Iam si quantitates motus ponantur aequales; erit $MV = mv$, et $MS = ms$, ideoque $M : m = v : V = s : S$, hoc est: *in motu uniformi, si eaedem sint motus quantitates, sunt materiae quantitates in ratione reciproca velocitatum aut spatiorum aequali tempore percursorum.* Quantitas materiae appellari etiam solet *massa*, et quantitas motus dicitur etiam *vis motrix*. At si nulla habeatur ratio quantitatis materiae, solaque consideretur velocitas aucta vel retardata; tunc vis illa ap-

pellatur *vis acceleratrix* in primo casu; in altero autem *retardatrix*. His praemissis sit:

CONCLVSIO.

DEMONNSTRATVR VIS INERTIAE.

Vim inertiae demonstrat experientia. Et quidem quod spectat ad corpora quiescentia, ea in quiete perpetuo manere observamus, nisi vi aliqua ad motum concitentur. Si autem aliquando ignota vi corpus moveri contingat, id tamen non sine latente vi aliqua fieri, ex analogia naturae iure optimo concludere debemus. Et re vera exsistit motus causa, licet sensus nostros fugiat, et nulla aliquando fortasse detur causa corporea; quod quidem probe notandum est. Etenim quamvis sine alio corpore impellente corpora non moveri ut plurimum observemus, analogiae tamen lege abuteretur, qui corpora nulla sine alterius corporis impulsu umquam moveri pronuntiaret. Et certe si gravitatis causam attente quis meditatus fuerit, eam ab aliquo corporis impulsu repetendam esse non facile concedet; quin immo in contrariam opinionem, newtonianorum scilicet, propensior erit. Sed hac de re data opera deinde sermonem habebimus.

Quod spectat ad corpora ad motum semel concitata, ea in motu diutius perseverare obser-

vamus, quo magis de medio tolluntur impedimenta. Quare si ita removeri possint obstacula omnia, quae sane sunt plurima, ut nullae omnino sint vires retardatrices, merito adserere possumus, perpetuum futurum esse corporum motum. Pari ratione adfirmare licet, motum perpetuo futurum esse uniformem et rectilineum. Diminutis enim impedimentis, ad uniformitatem et rectilineum motum corpus magis tendere deprehenditur. Si globus aliquis eximie perpolitus in superficie plana probe laevigata incedat, in linea recta progredi videtur, neque ad dexteram declinans neque ad sinistram, donec tandem motus exstinguatur asperitate plani aliisque impedimentis, quae nulla vitari possunt hominum industria. At quo pauciora manent impedimenta, eo magis experimenta ad veritatem accedunt.

Doctrinam hanc variis exemplis illustrare non abs re erit. Corpus in navigii tabulato constitutum quiescit, manente navigii motu constanti et uniformi. Porro si corpus tenderet ad quietem, ad ipsum gubernaculum corpus illud fugere deberet, quod quidem non minus mirandum videretur, quam si, quiescente navi, idem corpus gubernaculum versus sponte recederet. Praeterea si corpus directionem motus sponte mutare posset, in praedicto casu, navigii scilicet motu uniformi et rectilineo delati, corpus illud in tabulato non

quiesceret, quod est observationi contrarium. At si navigii motus subito sistatur, homines stantes in navi antrorsum praecipites ruent, quod facile experiri quisque potest stans in curru celerrime delato, cuius motus statim sistitur. Is enim in partem currus anteriorem sese raptum sentiet. Si vas aqua plenum in tabula aliqua collocetur, et vi satis magna impellatur, aqua in vase sub initio motus versus partes motui vasis contrarias tendere videbitur, non quod re vera talis motus aquae impressus sit, sed quum aqua in eodem quietis statu perseverare conetur, vas motum suum aquae statim imprimere non potest, ac proinde aqua, a vase derelicta, ut ita dicam, et re vera quiescens locum mutare videbitur. Tandem postquam vasis motus in aquam transit, et aqua una cum vase uniformiter et eadem celeritate progredi coeperit, si vasis motus subito cohibeatur; aqua tamen in eodem motu perseverare conabitur, et supra vasis latera adsurget. Huic causae tribuendum est, quod, navi turbulento mari iactata, in ipsa sedentes homines, doloribus, nausea et vomitu adficiantur, praesertim si mari non fuerint adsueti. Etenim liquores in ventriculo, intestinis, vasis sanguiferis, ceterisque canalibus contenti navis iactionibus non statim obediunt. Vnde in corpore humano fluidorum motus turbabitur, et morbi orientur. Ex his omnibus sic tandem argumentamur: vis illa

tamquam universalis corporum omnium proprietas haberi debet, quam in singulis corporibus observamus; atqui vim inertiae, quod ad partes singulas, in omnibus corporibus experimur, quantum ferre potest experimentorum diligentia; ergo experimentis et observationibus demonstrata manet vis inertiae.

II. Corpora mutationi status resistere, demonstrant rationes metaphysicae. Et quidem si corpora mutationi status non resistant, corpus quodlibet etiam valde magnum e quiete ad motum, vel e motu ad quietem non solum facili manu, sed etiam sine ullo conatu posset reduci: vis etiam minima motum quantumvis magnum posset producere, vel etiam sistere, nullaque foret inter causam et effectum proportio; quod repugnat ontologiae principiis atque experientiae.

Et certe hanc proportionem ostendunt quoque experimenta. Si enim producenda vel exstinguenda sit eadem velocitas in corpore duplo vel triplo maiori cet. id fieri non posse experimur sine vi duplo vel triplo maiori cet. ac proinde *vis inertiae est, ut quantitas materiae.* Si autem, manente eadem quantitate materiae, producenda vel exstinguenda sit velocitas duplo vel triplo maior cet. adhiberi debet vis duplo vel triplo maior cet. ac proinde *vis inertiae est, ut velocitas producenda vel exstinguenda.* Quare generatim *vis inertiae est, ut quantitas motus producen-*

da vel exstinguenda. Haec ratiocinatio accurate quidem demonstrat, corpora mutationi status resistere, ac proinde vi inertiae praedita esse. At vis inertiae partes singulas, perpetuam scilicet motus uniformitatem, illiusque rectilineam directionem non aeque evincit. Argumentum aliud desumi solet ex principio rationis sufficientis. Si enim corpus sibi ipsi relinquatur, nullaque accedat vis contraria, in statu suo perseverare debet, quum nulla sit actio, cur statum mutet. Id quidem facile concedunt philosophi, si agatur de corpore quiescente; negant autem nonnulli de corpore moto, quod suapte natura ad quietem tendere adfirmant. Iis ergo ratio sufficiens est ipsa corporis indoles et natura. Quamvis autem non raro utilissimum sit rationis sufficientis principium; quia tamen saepius mortales latet rerum ratio, fateri debemus, principium illud caute admodum adhibendum esse. Quae quum ita sint, patet, vim inertiae, si partes eius singulas consideremus, habendam esse tamquam principium experientia magis, quam accurata aliqua demonstratione innixum. *Quae proinde tamquam prima ex tribus motus legibus a Newtono adducitur, et sic effertur:*

Lex I. motus: CORPVS OMNE PERSEVERAT IN STATV SVO QVIESCENDI VEL MOVENDI VNIFORMITER IN DIRECTVM, NISI QVA-

TENVS A VIRIBVS IMPRESSIS COGITVR STATVM ILLVM MVTARE.

SOLVVNTVR OBIECTIONES.

Obiect. I. Si corpus aliquod in aëre deseratur, sibique permittatur, sponte descendit sine ulla vi impellente; ergo corpus non perseverat in quiete, seclusa etiam vi qualibet impressa.

Resp. dist. ant.: sine ulla vi impellente, quae sensibus conspicua sit, C. ant., sine ulla vi impellente, quae sensus fugiat, N. ant. et cons. Imperita hominum multitudo sensuum erroribus adsueta sibi facile persuadet, corpora sine ulla vi in terram descendere, quum nullam videant. Vnde credunt plerique homines, corpora descendere, quia non sustentantur. Verum etiamsi nulla oculis pateat vis externa, nullam tamen esse, temerario quis adfirmaret. Fingere enim possumus fluidum quoddam subtilissimum omnem oculorum aciem longe fugiens vel etiam, ut newtonianis placet, vim quamdam internam sine ullo interveniente fluido possumus admittere, ut iam observavimus. Sed argumentum illud fuse et accurate convenienti loco prosequemur. Hunc vulgi errorem quotidiano experimento depellere satis erit. Si corpus in tabula horizontali constituatur, ¿qua de causa per tabulae superficiem motu horizontali non in-

cedit corpus illud, quum nihil impediat? ¿Cur sursum non adscendit idem corpus, quum nihil motui secundum hanc directionem resistat? Quum ergo corpus deorsum moveatur, necessum est, ut vi aliqua, quaecumque sit, urgeatur. Merito igitur philosophi mirantur corporum descensum, quem sine ulla difficultatis suspicione negligenter adspicit hominum vulgus. Ceterum ex hàc responsione patet, vim inertiae diversam omnino esse a vi gravitatis, qua nempe corpora deorsum urgentur. Et quidem vis inertiae secundum quamlibet directionem sentitur. Si enim corpus aliquod e quiete ad motum, vel e motu ad quietem reducere quis tentaverit secundum quamlibet directionem vel horizontalem vel perpendicularem aut utcumque obliquam; id fieri non posse, sentiet, sine conatu aliquo, sine resistentia aliqua. Immo si quis corpus descendens manu superne percutiat, resistentiam aliquam experietur; corpus nempe resistit accelerationi motus secundum ipsam descensus seu gravitatis directionem. Itaque evidens est, vim gravitatis longe differre a vi inertiae, et vires illas ab imperitis hominibus perperam confundi.

Obiect. 2. Si corpus in plano etiam eximie laevigato incedat, sensim languescit motus, atque tandem omnino exstinguitur: si globus filo suspensus agitatur, variosque itus et reditus perficit, sensim breviores fiunt glo-

bi vibrationes, atque tandem evanescunt. In ludo *trudiculari* globus eburneus per aliquod tempus motu rectilineo in tabula progreditur, sed in certis casibus, veluti sponte, per eamdem lineam rectam ad partes contrarias recedere videtur. Tandem si corpus aliquod secundum directionem horizontalem vel ad horizontem obliquam proiiciatur, in terram decidit curvam describens. Itaque sic argumentari licet: corporibus tribuenda non est vis illa, quam negare videntur experimenta; atqui vim inertiae negare videntur experimenta; ergo non exsistit.

Resp. C. mai., N. min. Obiecta experimenta explicabimus. Ad primum patet responsio ex dictis. Nullo enim artificio removeri possunt omnia impedimenta, ac proinde mirum non est, quod sistatur tandem penduli motus, aëris resistentia filique in puncto suspensionis impedimento retardatus. At si maxima industria filum suspendatur, per longum satis tempus perseverat illius motus. Quod autem in certis casibus globus eburneus in contrariam partem tendere videatur, id fit, quod globus motum aliquem circa axem in partes contrarias admiserit, qui quidem motus adhuc perseverat exstincto motu rectilineo, ac proinde globulus in contrariam directionem recedere videbitur, donec asperitate plani exstinguatur ipse quoque rotationis motus. Denique quod corpora horizonta-

liter vel oblique proiecta per curvam relabantur, nihil repugnat vi inertiae, quae vires alias quaslibet non excludit. Porro in praesenti casu praeter motum impressum agit etiam vis gravitatis, quae corpus deorsum revocat. At si nulla adesset vis gravitatis, nullaque alia vis aëris retardatrix, corpus recta et uniformiter abiret in infinitum secundum directionem motus impressi. Qua ratione autem compositis simul duobus motibus, motu scilicet impresso et motu ex vi gravitatis oriundo, curva describatur; et quaenam curva ex tali motuum compositione oriatur, deinde suo loco demonstrabimus.

Obiect. 3. Si corpus nostrum moveatur, vel in obstaculum aliquod impingat, sensationum nostrarum testimonio adquirimus vis cuiusdam maioris vel minoris notionem, quam ex quiete nullatenus comparamus. Et quidem corpus quiescens nullum umquam motum producere poterit; contra autem corpus incurrens in corpus quiescens, illud movebit. Ex his ergo sic concludere licet: vis illa in corpore quiescente saltem admitti non debet, quae in corporum motu tantum sese manifestat; atqui vis inertiae in corporibus dumtaxat motis sese manifestat; ergo in iis tantum exsistit vis inertiae.

Resp. C. mai., N. min. Facile sibi persuadent homines meditationibus philosophicis non satis adsueti, in corporibus motis ades-

se conatum quemdam, quo carent corpora quiescentia. Inde autem originem habet error ille, quod inanimatis corporibus ea facilius tribuamus, quae in proprio corpore observamus. Porro dum vis nomen ad inanimata corpora transferimus, levi etiam attentione patet, id fieri non posse, nisi in triplici dumtaxat sensu. I.° Si corpori inanimato propriam sensationem tribuamus, quod est absurdum. II.° Si vis nomine intelligamus metaphysicam quamdam entitatem a nostris sensationibus diversam, quam quidem nulla ratione intelligere, nec proinde definire possumus. III.° Tandem si vis nomine significemus effectum ipsum vel proprietatem aliquam effectu manifestatam, cuius causam non investigamus. Haec autem ultima significatio sola est rationi consona. At si *vis* nomini hanc significationem tribuimus, iam corpori quiescenti aeque ac moto competit, et quietis non minus quam motus continuatio tamquam lex naturae haberi potest. Tandem dum corpus incurrens corpori quiescenti motum imprimit, id facere non potest sine aliqua proprii motus iactura. Quae quidem iactura oritur ex vi, qua corpus quiescens status mutationi resistit; ac proinde corpori quiescenti non secus ac corpori moto tribuenda est vis ad conservandum statum suum, quamcumque notionem huic vocabulo iungere placeat.

Obiect. 4. Si corpora praedita sint vi in-

ertiae, iam nulla est motus continuati causa; atqui motum sine causa continuari repugnat; ergo nulla datur in corporibus vis inertiae.

Resp. N. mai. Frustra quidem philosophi de motus communicatione tantas lites excitant. Continuati motus nulla alia agnoscenda est primaria causa praeter Deum Optimum Maximum, qui non motum dumtaxat sed res omnes conservat; secunda autem causa est ipsa vis inertiae. Nec alia ratione perseverat motus, quam qua continuantur corporis alicuius figura, color, aut aliae huiusmodi adfectiones, quae semper eadem permanerent, nisi vis aliqua eas turbaverit. Multo quidem rectius et utilius se gererent physici, si motus retardati vel accelerati rationes legesque investigarent. Heic autem observandum superest, nos minime definitum velle, an vis motricis actio *continuata* esse debeat, an satis sit actio *instantanea* nullo deinde impedimento turbata. Quaestio illa ad aestimandos effectus, quod in physica unice volumus, superflua omnino est, et ad metaphysicam pertinet, stricteque coniuncta est cum disputatione, quam de rerum conservatione in metaphysicis institutionibus tractavimus.

ARTICVLVS II.

De principio actionis et reactionis.

DEFINITIO I.

Actionem corporis definire solent plerique physici: *vim*, quam corpus aliquod in aliud corpus exercet; seu vim, qua corpus aliquod aliud corpus premit vel percutit. At talis definitio ipsa re definita obscurior videtur. Nos autem omnem ambiguitatem removere vel maxime studentes, recordabimur, in corpore, quod *actu* movetur, vel ad motum tendit, nihil aliud clare intelligi, nisi ipsam quantitatem motus, quam habet, vel quam haberet sublatis omnibus impedimentis. Ac proinde actio corporis per ipsam motus quantitatem dumtaxat sese manifestare intelligitur. Itaque actionis vocabulo nullam aliam notionem subiici volumus, nisi ipsam quantitatem motus actu productam vel producendam, si omnia removerentur impedimenta. Inde autem statim intelligere licet, quid sit *reactio*. Nihil enim aliud est, nisi actio contraria, nempe quantitas motus in corpore agente amissa vel amittenda.

Receptum est apud physicos principium seu

Lex III. motus * : ACTIONI SEMPER AEQVALEM ESSE ET CONTRARIAM REACTIONEM.

Quid hoc principio intelligendum veniat; ex dictis evidens est. Nempe in omni actione corporea tantum motus corpori *agenti* decedit, quantum corpori *patienti* sive actionem suscipienti accedit. Illud autem utilissimum in universa physica principium sequenti conclusione explicabimus.

CONCLVSIO.

REACTIONEM ACTIONI CONTRARIAM ET AEQVALEM ESSE, DEMONSTRATVR.

I. Principium illud ex vi inertiae facile derivat. Etenim si corpus aliquod certam motus quantitatem in alio corpore producat, id fieri non potest, nisi mutationi status resistat corpus, quod datam motus quantitatem accipit. Necessum est igitur, inter corpus *agens* et corpus *patiens* mutuam veluti pugnam excitari ita, ut quantum motus accipit corpus patiens, tantum amittat corpus agens. Et quidem ponamus, reactionem actio-

* *Tertiam dico hanc legem, quia eo ordine ponitur a Newtono. Quae ab eo secunda dicitur, eam in* tract. de corporum conflictu, *adferam.*

ni aequalem non esse: iam corpus patiens omni mutationi status non resisteret, sed alicui dumtaxat mutationis parti; quod falsum esse, demonstravimus in praecedenti conclusione. Itaque patet, actionis et reactionis aequalitatem necessarium esse vis inertiae corollarium.

II. Idem principium experimentis, et exemplis demonstratur atque illustratur. Si corpus unum in alterum quiescens impingat, quidquid motu quiescenti corpori imprimitur, tantumdem impingenti subtrahitur. Si corpora ambo moveantur, et ad easdem tendant partes; corpus, quod celerius movetur, in aliud, quod movetur tardius, incurrit, et tantum motus amittit, quantum adquirit corpus percusum. Si corpora duo sibi obviam eant, sive in contrarias tendant partes; qualiscumque motus mutatio corpori uni accidat, eadem omnino corpori alteri continget ita, ut aequalis semper fiat in utroque corpore motuum iactura secundum propriam motus directionem. Casus singuli ád experientiam revocari facile possunt, si observentur spatia ab iisdem corporibus motu uniformi eodem tempore descripta. Quum enim spatia illa sint inter se, ut velocitates, ob datas corporum massas, habebitur quantitas motus ante et post conflictum, ideoque instituta comparatione innotescet quantitas motus per conflictum adquisita vel amissa (*artic. I. §. II.*). Haec autem experimenta omnia actionis et re-

actionis aequalitati semper consona deprehendantur, quantum patiuntur inevitabiles superficierum asperitates aliaque impedimenta plurima. Sed tota res multo magis perspicua fiet, ubi conflictuum leges explicabimus. Actionis et reactionis aequalitatem observare licet in attractionibus magneticis. Non solum magnes trahit ferrum, sed vicissim ab ipso ferro aequaliter trahitur ita, ut aequales sint motus quantitates tum in magnete tum in ferro productae. Experimentum hoc modo institui solet. Imponitur magnes suberis frusto, et ferrum alio suberis frusto pariter imponitur; ut nempe hoc artificio tam magnes quam ferrum aquae libere innatare possint. Deinde manu retinetur magnes, ferrum videbimus ad magnetem accedere; si vero ferrum immobile teneatur, ad illum magnetem accedere observabimus. Sed si utrumque corpus aquae innatare libere permittatur, magnes et ferrum sibi mutuo obviam ire conspicientur ita, ut spatia a ferro et magnete percursa semper sint in ratione reciproca massarum. Itaque aequales sunt quantitates motus hinc et inde genitae, ut patet ex demonstratis in articulo praecedenti.

Eadem lex variis exemplis confirmatur atque illustratur. Si navigium remis agatur, aqua per remorum palmulas retrorsum versus gubernaculum propellitur: rursus aqua in remos aequaliter agit, eosque una cum navigio, cui adfixi sunt, versus partem contra-

riam impellit, et hac vi promovetur navigium. Aqua scilicet reactione sua tantum motus imprimit navigio, quantum ipsa remorum vi accepit. Atque hinc intelligitur, eo celerius progredi navigium, quo maiores sunt vel numero plures remorum palmulae, vel etiam quo celerius intra aquam agitantur. Hinc quum natatio nihil aliud sit, quam brachiorum pedumque remigium, facile intelligitur, cur intra aquas promoveamur natando. Dum scilicet per m nuum pedumque palmas aqua retrorsum pellitur, illa iterum agendo in contrariam partem natantes propellit. Eodem artificio utuntur pisces, qui pro varia motus directione aquam repetitis variisque caudae ictibus feriunt. Idem etiam dicendum est de avium volatu. Dum enim aves alarum impetu aërem deorsum verberant, aër avium alas sursum sublevat; si versus orientem pellatur aër, reactio aëris aves in occidentem impellit.

SOLVVNTVR OBIECTIONES.

Obiect. 1. Inter varia actionis et reactionis exempla hoc primum a celeberrimo Newtono adhibetur. Si equus lapidem funi adligatum trahit, aequa vi retrahitur equus in lapidem. Verum ex illa actionis et reactionis aequalitate nullus umquam esse potest motus. Si enim vis agens aequali resistentia absorbetur atque retunditur, ¿ qui fieri potest,

ut in praedicto exemplo equus lapidem trahat? Itaque sic argumentari licet: principium illud admitti non debet, quod perpetuam quietem perpetuumque aequilibrium induceret; atqui principium seu lex actionis et reactionis perpetuam quietem induceret, ergo non est admittendum.

Resp. C. mai., N. min. Nonnulli philosophi obiectione praecedenti decepti de actionis et reactionis aequalitate dubitarunt. Sed tota obiectio pura nominis ambiguitate male fulcitur. Itaque confundi non debent *vis* et *actionis* nomina. Vis corporum non est actio ipsa, idque adlato exemplo manifestum fit. Dum equus lapidem trahit, totam vim suam non impendit ad superandam lapidis resistentiam, sed aliquam dumtaxat vis suae partem, quae *actio* dicitur. Itaque per reactionem lapidis eam vis suae partem equus amittit, quae necessaria est ad vincendam lapidis resistentiam, vi autem reliqua equus lapidem trahit. Porro evidens est, legem aequilibrii longe differre a principio actionis et reactionis. Duae enim vires dicuntur in aequilibrio, si fuerint aequales et oppositae, nullusque manente aequilibrio, contingere potest motus. Verum quamvis actioni aequalis et contraria sit reactio, non tamen vi toti reactio semper aequalis est. Dum autem id contingit, in hoc casu habetur aequilibrium, tumque vis tota aequalis est actioni.

Obiect. 2. Si quis in navigio sedens, conto vel alio quolibet instrumento navigium a litore repellat, id fit reactione ipsius litoris; ac proinde ex principio mox explicato eadem motus quantitas, qua navigium recedit a litore, in ipsum litus transferri deberet; atqui hoc est absurdum; ergo et principium actionis et reactionis.

Resp. C. mai., N. min. Accurate distingui debet quantitas motus ab ipsa velocitate. Si quantitates motus fuerint aequales; erunt velocitates in ratione reciproca massarum ex demonstratis (*art. 1. §. 11.*), ac proinde quo maior est massa, eo minor est velocitas. Iam vero litus est firmissimus obex, et corpus immensum, si conferatur cum navi; ac proinde litoris velocitas erit minima et physice nulla. Quamvis ergo nullam in magnis corporibus velocitatem observemus, motus quantitas potest esse maxima.

Obiect. 3. Omnia corpora in superficie terrae posita versus terram gravia sunt; hac vi gravitatis corpora ad telluris superficiem descendunt. Consentiunt philosophi omnes, corpora descendentia a tellure attrahi; quaecumque sit huius attractionis causa, de qua quidem maxime dissentiunt. Igitur si corpora a tellure trahantur, tellus vicissim trahetur a corporibus. Ita dum lapis ad terram descendit, terra vicissim ad lapidem adsurget, et aequales erunt motus tum in lapide tum in terra

geniti ; atqui hoc repugnare omnino videtur; ergo et principium actionis et reactionis.

Resp. N. min. Ex praecedenti responsione facile solvitur haec obiectio. Re quidem vera aequales snnt motus quantitates tum in lapide tum in terra productae. Quum vero quantitas materiae in terra immense superet quantitatem materiae in lapide ; velocitas lapidis immense superabit velocitatem , qua terra ad lapidem tendit ; ideoque , si physice loquamur , velocitas terrae nulla est. Quod quidem calculo demonstrare non abs re erit. Ponamus lapidem centum pedum solidorum versus terram descendere. Spatium a lapide tempore unius minuti secundi percursum erit circiter pedum parisiensium 15 , ut ostendunt experimenta , sed ex mensuris geographicis tota globi terraquei moles continet pedes solidos 30 , 000 , 000 , 000 , 000 , 000 , 000 , 000. Itaque ponamus iam , terram ubique esse eiusdem densitatis cum vulgaribus lapidibus, quamvis omnino credibile sit, eam esse multo densiorem ; erit materiae quantitas in terra ad materiae quantitatem in lapide ; ut 300 , 000 , 000 , 000 , 000 , 000 , 000 ad 1. Proindeque dum lapis descendit per spatium 14 pedum , terra versus lapidem trahetur per unius pedis partes $\frac{15}{300000000000000000000} = \frac{1}{20000000000000000000}$, quae tantilla est

quantitas, ut ipsam imaginandi vim longe effugiat. Ac proinde in physica negligi potest, et pro nulla haberi, quamvis geometrice et secundum veritatem loquendo terra ad lapidem accedat, et utrumque corpus aequaliter mutuo se trahat *. His paucis obiectionibus respondisse satis sit ad explicandum actionis et reactionis principium. Ceterum huius principii usus frequentissime recurret, praesertim in astronomia.

ARTICVLVS III.

De virium compositione.

DEFINITIO I.

Virium compositio dicitur: *virium plurium in vim unicam contractio.* Quia vero virium nomine mihi aliud intelligimus nisi motus ipsos dato aliquo tempore productos; hinc patet,

* *Quamvis in mutua actione attractionis et gravitatis corporum vigeat etiam lex de aequalitate actionis et reactionis; diverso tamen modo tunc explicandi sunt actionis et reactionis effectus, atque quum vires mechanice operantur. Quod et fecit Newtonus distinctam adhibens explicationem in viribus gravitatis seu attractionis, atque mechanicis*, schol. ad axiomata sive leges motus princ. math. tom. I.

Fig. virium compositionem nihil aliud esse, quam ipsam compositionem motuum. Itaque *motus compositus* dicitur : *qui ex pluribus motibus diversam directionem habentibus consurgit.* Neque enim tamquam compositum habemus motum illum, qui ex pluribus motibus in eamdem directionem conspirantibus vel directe oppositis oritur. Evidens enim est, in primo casu unicum esse motum summae motuum aequalem ; in altero autem casu motus aequalis est motuum differentiae, quae quidem differentia si nulla fuerit, hoc est, si quantitates motus fuerint aequales et directe oppositae ; habetur aequilibrium. Motuum compositorum doctrina cum ipsa vi inertiae necessario ordine coniuncta est, ut ex dicendis manifestum fiet.

1. Fingantur rectae *AB*, *AD* perpendiculares et aequales, quae exhibeant vires secundum directiones *AB*, *AD*, sive quod idem est, quae repraesentent spatia datis viribus eodem tempore motu uniformi percursa (*art. 1.* §. *11.*). Corpus immineat motuum angulo *A*, urgeaturque viribus secundum directiones *AB*, *AD*. Duo quolibet tempore corpus vi unica secundum *AD* percurrat spatium *AC* ; eodem tempore vi unica secundum *AB* percurreret spatium *AI* spatio priori *AC* aequale (*ex demonstratis de vi inertiae*). Iam ponamus, corpus illud viribus duabus simul urgeri : quo tempore progreditur per *AC*, ad-

scendet quoque per *AI* vel *CE*; sunt enim per constructionem rectae *AI*, *CE*, itemque *IE*, *AC* aequales et parallelae; ergo corpus reperietur in directionem *AB* et *AD* concursu; ac proinde in concursu rectarum *IE*, *CE*, hoc est; in diagonali quadrati *AIEC*, atque ad punctum *E* perveniet eodem tempore, quo motibus seiunctis percurreret *AC* vel *AI*, ut patet. Eadem ratiocinatio ad aliud quodlibet tempus transferri potest. Quum enim spatia *AI*, *IE*, itemque *AB*, *BF* sint aequalia, erit $AI : IE = AB : BF$; ac proinde quum sint *IE*, *AC*, itemque *BF*, *AD* aequales et parallelae, erit recta *AF* diagonalis quadrati *ABFD*. In hac demonstratione velocitates non solum ponuntur uniformes, sed etiam aequales. At evidens est, totam demonstrationis seriem perinde se habere, etiamsi velocitates non fuerint aequales. Etenim velocitates uniformes sunt, ut spatia iisdem temporibus descripta (*art. 1. §. 11.*); ergo velocitas per *AI* est ad velocitatem per *IE*, ut *AI*, ad *IE*, ut *AB* ad *BF*; ac proinde $AI : IE = AB : BF$. Ideoque eadem manet demonstratio, quae etiam valet, quamvis velocitates non fuerint uniformes; dummodo tamen in eadem data ratione semper accelerentur vel retardentur. Puta, si velocitas per *AD* sit dupla vel tripla cet. velocitatis per *AB*, res perinde se habet, quomodocumque acceleretur vel retardetur ve-

locitas per *AB* et *AD*, dummodo velocitas per *AD* semper maneat dupla vel tripla cet. velocitatis per *AB*. Quod evidens est, quum perpetuo servetur triangulorum *AIE*, *ABF* similitudo.

Hoc ergo est universalissimum principium. Si corpus urgeatur duobus motibus, quorum directiones eumdem angulum semper contineant, corpus illud describet diagonalem parallelogrammi, cuius latera sunt spatia secundum utramque directionem eodem tempore percurrenda; dummodo tamen maneant praedictae motuum conditiones, si nempe directiones eaedem maneant, et velocitates sint uniformes aut similes. Adolescentium imaginatio in hac demonstratione sublevari potest exemplo normae, quae sibi semper parallela uniformiter moveatur, interea dum corpus aliquod uniformiter quoque progreditur secundum ductum normae, quam corpus perpetuo radat.

In hoc autem exemplo atque in praecedenti demonstratione unum monendum est. In hoc scilicet exemplo, atque etiam in tota demonstrationis hypothesi vires duae tamquam seorsum agentes perpetuo considerantur, quod quidem a statu quaestionis non nihil abludere videtur; quum primo motus initio vires duae simul imprimantur, et deinde coniunctim agant. Itaque ut praecedens demonstratio ad severitatem geometricam sit omnino composita, ostendi debet, demon-

strationem perinde se habere, sive vires considerentur seorsum sive coniunctim, quod quidem facile praestari potest. Nam ponamus, vires duas dato aliquo tempore seorsum uniformiter agere in corpus *A*, et deinde corpus illud sibi relinqui, seu ab ipsis viribus deseri; evidens est, in hoc casu describi diagonalem, ut patet ex demonstratione praecedenti, et ex vi inertiae. Valet autem demonstratio, si vires duae dato quolibet tempore seorsum considerentur. Itaque ex temporis conditione vel limitatione nullatenus pendent corporis directio et velocitas, ac proinde describitur diagonalis, etiamsi tempus ponatur minimum vel nullum, dum scilicet vires duae coniunctim agant. Vulgari demonstrationi, quae in omnibus physicorum libris passim legitur, addenda est haec ratiocinatio. Quamvis enim verum sit principium sive considerentur vires seorsum sive coniunctim, res tamen non ita est evidens, ut sine demonstratione praetermitti debeat.

Motus compositi exemplum praebet cymba, profluente amne delata. Si quis e cymba interim progrediente in litus desilire voluerit, eum, quem sibi proponit, litoris locum non attinget. Motus enim ille componitur ex duplici motu, navigii scilicet et hominis desilientis, ac proinde in hoc casu per motuum diagonalem homo ad litus perveniet. Idem est exemplum hominis praecipiti curru

devecti, et interim esse in terram proripientis, quod quidem temere omnino fit. Si enim satis magnus non sit desilientis hominis impetus, et currus ad saltus partem declinaverit, rotis ipsis imminere et opprimi facile poterit imprudens homo.

Defin. II. Quamvis duas dumtaxat vires consideraverim; simili tamen ratiocinatione patet, vires utcumque numero plures in unicam diagonalem componi posse. Etenim considerentur primum vires duae, quarum inveniatur diagonalis, quae proinde vires duas repraesentabit. Deinde diagonalis illa conferatur cum vi tertia, et iterum inveniatur diagonalis, et ita deinceps, donec perveniatur ad communem virium omnium diagonalem, quae *media directio* appellatur, atque haec erit via, quam corpus his omnibus viribus simul sollicitatum percurret. Evidens autem est, vim quamlibet compositam inversa operatione in vires per latera resolvi posse, atque haec operatio *virium resolutio* vocari solet. Cavendum tamen est maxime, ne vis composita cum viribus per latera confundatur. Vis composita viribus componentibus aequalis non est. Quum enim vires componentes exhibeantur per latera trianguli, cuius tertium latus est ipsa vis composita; patet, vires componentes maiores esse vi composita, quemadmodum latera duo trianguli sunt tertio quolibet maiora. At vires illae *aequipollentes* merito di-

ci possunt, hoc est, motus perinde se habet sive corpus urgeatur viribus duabus per latera, sive urgeatur vi unica per diagonalem ex duabus viribus composita. Fig.

Hactenus consideravimus vel motus uniformes vel similes. At si motus neque uniformes fuerint neque similes ita, ut spatia iisdem temporibus descripta datam inter se rationem non habeant; evidens est, similia non esse triangula ex motibus componentibus et ex diagonali formata. Ac proinde singulis temporibus minimis directionem perpetuo mutat diagonalis; ideoque abit in curvam. E. g. recta *CD* exhibeat spatia motu uniformi descri- 2.
pta, rectae autem perpendiculares, ut *EI* cet. exhibeant spatia vi aliqua perpetuo acceleratrice percursa. Corpus motu uniformi sollicitatum per *CD* recta abiret in infinitum, singulis temporibus aequalibus aequalia spatia describens per vim inertiae. At ob vim acceleratricem per *EI*, corpus his duabus viribus sollicitatum progreditur per curvam *CI*. Etenim manentibus *CE*, *EF* aequalibus, erit *CG* minor quam *GH*, ob motum perpetuo acceleratum secundum directionem *EI*. Igitur triangula *CEI*, *CFK*, *CDB* non sunt similia, ac proinde quum triangula illa utcumque minima concipi possint, evidens est: rectas quascumque *EI*, *FK*, *DB* ad lineam rectam non pertinere, ac proinde diagonalis est curvilinea.

Defin. III. Si recta *CA* consideretur tamquam axis curvae, erunt *CG* vel *EI*, *CH* vel *FK* *abscissae*, rectae autem *GI* vel *CE*, *HK* vel *CF* cet. *ordinatae*. Iam vero natura sive *aequatio* curvae definitur ex ratione abscissarum ad ordinatas. Quare patet, curvam duabus quibuslibet viribus descriptam pendere ex ipsa virium natura seu ratione. Ceterum ex demonstratis patet, vi unica curvam describi non posse. Corpus enim per vim inertiae vis impressae directionem seu lineam rectam perpetuo sequitur. Quare dum corpus curvam aliquam describit, duabus saltem viribus illud sollicitari, necessum est.

Defin. IV. Curvam quamlibet considerant geometrae tamquam polygonum constans ex lateribus rectis tangentibus numero infinitis et infinite parvis. Quare dum corpus movetur in arcu curvae infinitesimo, idem omnino est ac si moveretur per tangentem infinite parvam. Si ergo statim desineret actio vis per *EI*, corpus abiret secundum directionem tangentis *CD* per vim inertiae. Hinc fit, ut curva quaelibet considerari possit tamquam duabus viribus genita, quarum una dicitur *tangentialis*; altera autem, quae corpus a tangente retrahit, *centripeta* appellatur, quod quidem nomen retinet, sive vis illa ad unum punctum perpetuo dirigatur, sive directionem perpetuo mutet. *Vis* autem *contraria*, *qua corpus ab arcu ad tangentem conatur*

deflectere, vocatur vis *centrifuga*. Fig.

De viribus centripeta, centrifuga et tangentiali, data opera, quantum licet, deinde tractabimus. Heic observare satis sit, vim tangentialem et centrifugam ex vi inertiae originem quidem habere. At cavendum est diligenter, ne vis centrifuga expressa per lineolam *IE* confundatur cum vi tangentiali, quae exprimitur per *CE*, in quem errorem mirum sane est, quam graviter in tanta rerum physicarum luce prolapsi sint viri doctrinae fama celebres. Et quidem virium illarum nec conveniunt directiones, ut patet, neque etiam mensurae; immo vis tangentialis infinities maior est vi centrifuga. Sit *AC* arcus 4.
circuli infinitesimus, erit *AM* vel *CB* ad *MC* vel *AB*; ut *MC* ad *MD*. Quia vero arcus *AC* est infinitesimus, erunt rectae *AB* et *MC* infinitesimae, ac proinde *MC* erit infinitesima respectu *MD*; ideoque *BC* erit infinitesima respectu *AB*. Quare vis tangentialis *AB* est infinite maior vi centrifuga *BC* *. Alterum tandem monendum est, vim centripetam et centrifugam per eamdem lineolam exprimi, ac proinde aequales esse. Quum enim vires sint, ut spatia iisdem temporibus minimis descripta, evidens est, vim centripetam et centrifugam, quae per idem spa-

* *Id tamen intelligendum est tempusculo infinite parvo.*

Fig. tium eodem tempore minimo descriptum exhibentur, aequales esse. Quamvis autem aequales sint vires illae, longe tamen inter se differunt. Nam vis centrifuga est vis *passiva* dumtaxat; quae nullum exserit effectum, nisi cessante vi centripeta; haec autem ultima est vis *activa*, quae nempe perpetuo agit.

Virium centripetae et centrifugae exemplum praebet lapis funda circumactus. Manus lapidem retinens exhibet vim centripetam. Vis autem, quae funem tendit, qua scilicet lapis conatur recedere a circumferentia circuli descripti, repraesentat vim centrifugam. Et re quidem ipsa, si manus lapidem deserat, statim lapis abit per tangentem circuli antea descripti *. Haec autem pauca

* *Haec Auctoris doctrina adnimadversione indiget. Vis centrifuga, utpote fictitia et hypothetica, nullum verum effectum producere valet; adeoque effectus omnes in adducto exemplo a vi dumtaxat centripeta et tangentiali provenire debent. Et quidem vis quae funem tendit, et quae contrario nisu a manu sentitur, qua scilicet lapis conatur recedere a circuli circumferentia, non oritur a vi centrifuga, sed a tangentiali. Quod*
5. *ut in bono lumine collocetur, exprimat* SA *vim tangentialem, et* Sm *vim centripetam. Quum* (ex §. 11.) *vis tangentialis* SA *etsi unica sit, considerari possit tamquam dia-*

dicta sint. De hoc enim utilissimo argumento sermo deinde recurret.

Alteram, quam breviter attigimus, motus compositi speciem oculis demonstrant corpora per aërem horizontaliter vel oblique proiecta. Motu composito lineam curvam in aëre delineant tubuli nitrato pulvere referti. In his casibus duae considerandae sunt vires, una scilicet *proiectionis* ex manu vel pulvere pyrio oriunda; altera autem est vis gravitatis, qua corpus motu accelerato descendit. Sed huius curvae naturam demonstrabimus, ubi de corporum proiectorum motu.

gonalis parallelogrammi SnAi; *aequipollens erit duabus aliis* Si, Sn, *ipsaque sola producere valet, et re ipsa producit effectus, qui a duabus illis viribus seorsum agentibus producerentur. Vis autem* Sn *aequalis et contraria est vi centripetae* Sm. *Hac autem vi* Sn, *neutiquam exstitura, nisi a tangentiali produceretur, conatur lapis a centro recedere, et singulis tempusculis a vi centripeta exstingui debet, ut lapis in circuli circumferentia moveri pergat.*

APPENDIX.

De quibusdam capitis praecedentis utilitatibus.

I.

Materiam cogitationis expertem esse, invictissimis argumentis in metaphysica iam ostendimus. Quamvis autem fide divina verissimum sit primarium illud religionis dogma; varia tamen argumenta conquirere, et adversus incredulos congerere religiosos philosophos maxime decet. Vix suspicari quis statim posset, vim inertiae aliud philosophis suppeditare huius dogmatis argumentum, quod tamen valide urgeri potest. Et quidem substantia cogitans vim habet mutandi statum suum: potest nempe cogitationem praesentem deserere, et ad aliam transire: actionem aliquam velle aut respuere. Quam quidem facultatem proprio conscientiae testimonio experimur. Quum ergo vis inertiae universalissima sit materiae proprietas ita, ut nulla materiae pars statum suum vel leviter sponte mutare possit; manifestum est, cogitandi facultatem ad materiam pertinere non posse. Neque est, quod obiiciant, vim inertiae locum habere dumtaxat in materia nullo principio intelligente informata. Nam rursus, principium illud intelligens materiae coniunctum vel est mate-

riiale vel non. Si primum, iam eadem recurrit cogitandi impossibilitas; si secundum, principium illud facultatem cogitandi ex se habere necessum est sine ullo materiae auxilio, quum ipsa non habeat cogitandi vim, quam proinde nullo modo conferri potest. Itaque ex duarum substantiarum, quae cogitare non possunt coniunctione, oriri non potest cogitandi facultas. Praeterea perversissimi homines, qui materiae cogitationem non repugnare adserunt, si impiissimi Spinosae sectatores excipiamus, non inficiantur, exsistere substantias spirituales et intelligentes. Quum ergo vim intelligendi habeant, principium intelligens nulla materiae ope ad cogitandum indiget. Itaque hoc argumentum validissime propugnari potest contra eos, qui spiritus extra materiam exsistere fatentur. At contra spinosistas aliis agendum est argumentis, quae in nostris institutionibus metaphysicis explicavimus, vel prius demonstranda est spirituum extra materiam cogitantium exsistentia. Neque est tandem, quod obiiciant, Deum omnipotentem his duabus substantiis simul coniunctis tribuere potuisse vim cogitandi, quam materiae convenire non posse, proprio loco ostendimus. Ex praecedenti ratiocinatione id saltem evidens fit: universalissimis materiae proprietatibus repugnare, ut materia vim cogitandi habeat. Nemo igitur nos tamquam ultra modum religiosos reprehendat,

quod huius ratiocinationis pondus argumentis metaphysicis adiungamus.

II. Actionis et reactionis exempla ex avium volatu, piscium natatu, remorum actione adferre solent physici. Idem vero principium ad eximiam utilitatem traduxit vir doctissimus Daniel Bernoullius, qui in egregio opere, cui titulus est *hydrodynamica*, novum et hactenus inauditum navigandi genus proposuit sine velis et remis, quod quidem paradoxum omnino videbitur. Rem paucis exponam. Navigio versus puppim firmiter adligari, praecipit Bernoullius, canalem utrimque apertum, et aquae perpetuo plenum, quod quidem sine magno labore antliarum ope praestari potest. Iam aqua ex canali versus puppim effluens, in ipsam maris aquam agit, ipsa autem reagit, atque hac perpetua reactione antrorsum propellitur navis, et sine velis ac remis gubernatur; quo quidem loquendi modo res impossibilis et absurda exprimi solet. Huius reactionis aestimandae ratio ad sublimiorem fluidorum doctrinam pertinet. Neque tantam rerum physicarum difficultatem praesens locus sustinet. Quia tamen novus ille navigationis modus ex actionis et reactionis principio natus est, in praesenti appendice hanc doctissimi viri cogitationem opportune interponendam esse existimavi. Neque deerunt fortasse imperiti homines, qui rem velut insulsam rideant. At philosophi est magnorum virorum

meditationes venerari et tamen perpendere, atque, si fieri possit, ad experientiam revocare. Ego autem in navicula non sine successu rem tentavi, atque innito calcůlo invenitur, tantam hoc artificio obtineri posse praegrandis etiam navis velocitatem, quae magna remigům manu vix ac ne vix quidem haberi potest. Calculo quidem subiici non possunt inordinatae aquarum directiones, marisque iactationes, ac proinde minuitur inventi utilitas, non tamen omnino tollitur. Haec maxima saltem haberi poterunt commoda. Nempe naves bellicas in praeliis navalibus deficiente omni vento, quo lubet, agere licebit, atque etiam brevibus traiectibus serena tempestate tranquilloque mari instituendis inservîre poterit talis navigii usus.

III. In cap. praecedenti de vi centrifuga brevem mentionem iniecimus. Ex huius vis doctrina innumerae in societatem humanam derivarunt utilitates, quarum unam heic seligere satis erit. Clarissimo viro Desagulierio debetur machina, quae *rota centrifuga* appellatur. Ex tympano ligneo parum alto constat haec machina, cuius cavitas in duodecim cellulas distributa est. Singulae autem cellulae ad tympani centrum protensae, cum aëre externo communicant ex parte circumferentiae, quae pro cellularum numero duodecim quoque foraminibus pertusa est. Tympanum hoc modo comparatum capsula maiori

parallelepipeda includitur, atque axe ita traiicitur, ut manubri ope extra capsulam prominentis converti possit. Rebus ita dispositis, si tympanum velocissime circumagatur, aëris particulae in tympano inclusae revolvuntur, ac proinde vim centrifugam adquirunt, et exitum quaerunt. Quare si in plano rotationis aperiantur foramina, quibus adnectantur flexibiles tubuli extra cubiculum protensi, aër in tympano conclusus, revoluta machina, exibit, aër autem in cubiculo contentus per foramen rotationis plano perpendiculare tympani cavitatem ingredietur: aëri expulso statim succedet aër iterum quoque expellendus. Iam vero quantum aëris excluditur, tantum quoque advenit per fenestras, ianuas, vel etiam cubiculi rimas. Quare patet, id tandem commodum nos lucrari, ut repetitis motibus nihil fere pristini aëris supersit. Quod quidem eximiae utilitatis esse potesr in nosocomiis, in fodinis, aliisque locis impuro aëre foedatis. Huius machinae utilitatem maximam testatam fecere peritissimi navium praefecti, qui in longinquis navigationibus huius rotae beneficio sese liberatos fuisse referunt a frequentissimo perniciosissimoque morbo, qui *scorbutus* dicitur. Dolendum ergo est, quod utilissima inventa respuere soleant plerique homines haud satis aequi talium rerum aestimatores. Ceterum praedictae maquinae usus oculis quoque fit conspicuus, si aëris loco crassiorem fu-

mum ex saccharo excitatum in tympani cavitatem introducamus; hunc enim, circumacto tympano, velocissime extrudi observabimus. Idem quoque alio experimento manifestum fiet, si nempe foramini in ipsa vis centrifugae directione aperto obiiciatur candelae flammula: hanc extrorsum pelli, et statim exstingui videbimus. Contra autem introrsum urgebitur et exstinguetur, si alteri foramini, quod rotationis plano perpendiculare est, admoveatur. Quod quidem manifestissimum est argumentum, pari ratione aërem ex una parte introduci, ex altera autem eiici. Huius machinae partes singulas explicare, et vim totam calculo aestimare nec praescripta his institutionibus brevitas nec rei difficultas patiuntur. Ex universa physicae serie magis ac magis fiet manifesta capitis praecedentis utilitas, quam paucis exemplis indicasse satis sit, ut studiosae iuventuti instilletur praeclarissimi studii amor, quantum unicuique pro vivendi instituto et ratione licet.

CAPVT II.

De vi attractionis variisque illius speciebus.

DEFINITIO I.

Attractio generatim spectata dicitur: *vis, qua corpora in se mutuo vel ad punctum*

Fig. *aliquod tendunt*, quod *centrum virium* ideo appellatur. Variae sunt attractionum species, quarum aliae certis dumtaxat corporibus competunt: talis est vis *magnetica*, *electrica* cet. Sed speciales illae attractiones ad physicam particularem pertinent. Aliae autem attractiones omnibus corporibus conveniunt, ac proinde in physica generali considerandae. Duplex autem est huiusmodi attractio universalis. Alia inter magna corpora et ad magnas exercetur distantias; alia inter minimas corporum particulas viget et in minimis dumtaxat intervallis. De hac utraque attractionis specie tractabimus, et generalem attractionis doctrinam praemittemus.

ARTICVLVS I.

De atractione generatim considerata.

I.

Corpus aliquod proiectum fingatur vi im-
3. pressa secundum directionem *AF* et interim vi alia perpetuo agente tendat versus punctum *S*. Tempore minimo corpus vi impressa per *AF* describere ponatur lineolam *AB*; tempusculo altero aequali percurreret aequalem lineolam *BC*, et ita deinceps. Iam vero dum corpus pervenit ad *B*, agat vis tendens ad centrum *S*, qua vi sola corpus describere possit lineolam *BE*. Completo paral-

lelogrammo *EBCD*, motu composito corpus describet diagonalem *BD* (*ex articulo praecedenti.*) Ex elementis geometriae evidens est, aequalia esse triangula *ABS*, *SBD* aequalibus temporibus descripta. Etenim triangula *ABS*, *SBC* aequalia sunt, quum aequales habeant bases *AB*, *BC*, communemque verticem *S*. Praeterea aequantur triangula *BSD*, *BSC* super eadem basi *BS*, et inter easdem parallelas *BS*, *CD* constituta. Igitur aequalia sunt triangula *BSD*, *BSA*, utpote aequalia eidem triangulo *BSC*. Quod autem demonstravimus de minimis duobus triangulis *ABS*, *BSD*, idem facile intelligitur de alia qualibet triangulorum serie. Et quidem seclusa vi tendente ad centrum *S*, corpus per vim inertiae moveri pergit secundum *BD*. Sed accedente vi versus *S*, eadem ratiocinatione patet, tertio tempore aequali aequale triangulum describi. Igitur aequalibus temporibus aequales triangulorum areae percurruntur, tempore duplo describitur area dupla, tempore triplo tripla. Quare generatim areae tempore quolibet descriptae sunt temporibus proportionales. Iam ponamus, polygonum hoc modo descriptum ex lateribus numero infinitis et infinite parvis compositum abire in curvam; manifestum est, corpus circa centrum virium *S* perpetuo describere areas temporibus proportionales. Demonstratum ergo est praeclarissimum theorema, quod astronomiae et univer-

sae fere physicae fundamentum est, nempe:

Theorema I. Si corpvs describat cvrvam qvamlibet vi tendente ad pvnctvm aliqvod; radivs vector *SD* describet areas circa idem pvnctvm temporibvs proportionales.

Theorema II. Versa vice: Si corpvs moveatvr in cvrva, et radivs vector areas temporibvs proportionales circa pvnctvm aliqvod describat; vrgetvr vi tendente ad illvd pvnctvm.

Etenim si vis alia ad punctum extra *S* diversum tenderet, iam directio *CD* non foret directioni *BE* parallela, ac proinde triangula *BSC*, *BDS* super communem basim constituta non forent inter easdem parallelas, nec proinde aequalia, quod est contra hypothesim. Ponimus enim, areas temporibus proportionales esse, ac proinde aequalia esse minima triangula temporibus aequalibus descripta. Itaque demonstratum etiam est, corpus, quod movetur in curva, et arcus circa punctum aliquod temporibus proportionales describit, urgeri vi ad illud punctum tendente. Ex hoc theoremate universa pendet attractionis doctrina.

Ex hoc ipso theoremate evidens est, velocitatem corporis in diversis curvae punctis

eo maiorem fore vel minorem, quo minor est vel maior recta a centro virium ad tangentem perpendiculariter ducta.

Coroll. NEMPE VELOCITATES LINEARES SVNT RECIPROCE, VT PERPENDICVLA E CENTRO VIRIVM IN TANGENTTES DEMISSA.

Etenim velocitates utcumque variabiles tempore infinite parvo tamquam uniformes considerari possunt, ob minimum sive infinitesimum velocitatis incrementum vel decrementum. Itaque velocitates uniformes per *AB*, *BD* sunt, ut spatia *AB*, *BD* iisdem temporibus minimis descripta (§. *11. art.1. cap.1.*). Sunt autem spatia illa bases triangulorum aequalium *ASB*, *BSD*, quae proinde sunt reciproce, ut perpendicula ex centro *S* in bases *AB*, *BD* demissa (*geom. cor. v. theor. 1. cap. 11. sect. 11.*) Sed polygono in curvam abeunte, latera *AB*, *BD* evadunt tangentes curvae in punctis *A* et *B*; erunt igitur velocitates in singulis curvae punctis reciproce, ut perpendicula ex centro virium in tangentes demissa. Quod quidem corollarium eximiae utilitatis esse, ex dicendis manifestum fiet.

Attractionem in variis curvis considerare solent, qui sublimiorem physicae doctrinam explicant. Nos vero facilitati studentes in circulo dumtaxat rem considerabimus, atque hanc hypothesim ad physicam veritatem, quan-

Fig. tum licet, accurate transferre conabimur. Revolvatur in peripheria circuli ACD corpus,
4. A, quod ubi ad A pervenit, sublata vi tendente ad centrum, qua in circumferentia retinetur, per tangentem AB in infinitum excurreret. Itaque ut corpus in peripheria detineatur, necessum est, vim aliquam perpetuo agere, quae corpus urgeat versus D per spatium BC, interea dum mobile vi impressa progrederetur per spatium infinitesimum AB; his enim viribus coniunctis mobile describet lineam AC. Haec omnia facile patent ex demonstratis de virium compositione. Vis, quae exhibetur per BC, dicitur *attractio*, quam alio nomine vim *centripetam* appellavimus. Vim autem, qua mobile ex arcu curvilineo transiret ad tangentem, *nisi a vi centripeta cohiberetur*, quaeque exhibetur per CB, diximus vim *centrifugam* *; ambae autem vires communi nomine *centrales* vocantur. Igitur lineola BC exprimet vim centralem. Iam vero in circulo ducta chorda infinitesima AC, erit ob triangulorum ACD, ACM similitudinem AM vel $BC : AC = AC : AD$; ac proinde AM; vel $BC = \frac{AC^2}{AD}$. Hoc est, vis

* *Hanc autem vim* centrifugam *intelligas esse fictitiam, physiceque nullam, si a tangentiali distinguatur, uti expos.* adnot. ad defin, IV. cap. praeced,

centralis in circulo est, ut quadratum chordae divisum per Diametrum. Quia autem arcus infinitesimus illiusque chorda aequipollent, loco chordae substituere licet ipsum arcum, ideoque sit

Propositio. VIS CENTRALIS IN CIRCVLO EST VT QVADRATVM ARCVS DIVISVM PER DIAMETRVM VEL PER RADIVM.

Quum autem virium centralium rationem dumtaxat haec formula exprimat; perinde est, sive diametrum sive semidiametrum adhibeamus. Porro vis centralis nomen retinet attractio, etiamsi vis illa ad unicum punctum non dirigatur: singulis temporibus directionem mutare potest. Vt enim mobile curvam describat, satis est, vis centralis directionem non congruere cum ipsa directione tangentis, quod quidem evidens est ex articulo praecedenti. His praemissis in proximo articulo fusius explicandis, sit

CONCLVSIO.

VNIVERSALEM INTER CORPORA OMNIA ATTRACTIONEM DEMONSTRANT PHAENOMENA

I. Circa solem revolvi observantur stellae quinque, *planetae* sive *erraticae* ideo appellatae. Harum nomina sunt: *mercurius*, *venus*, *mars*, *iupiter*, *saturnus*. Planetas illos ita cir-

ca solem revolvi, demonstrant observationes astronomicae, ut radiis vectoribus ad solem ductis areas describant temporibus proportionales. Lex illa, qua planetae circa solem areas describunt temporibus proportionales, ab inventore suo *prima lex Kepleri* solet appellari. Saturnum comitantur stellulae quinque, quae satellites dicuntur, et iovem quattuor. Illi autem satellites, qui *planetae secundarii* etiam appellantur, eadem lege circa planetas primarios revolvuntur. Areas scilicet circa suos planetas et circa solem ipsum describunt temporibus proportionales. Revolvitur quoque luna circa terram nostram, radiisque ad ipsius centrum ductis areas describit temporibus quam proxime proportionales. Igitur planetae primarii vi centripeta tendunt in solem, et planetae secundarii tendunt quoque in suos primarios, atque in solem ipsum. Luna etiam vi centripeta urgetur in terram. Porro actioni aequalis est et contraria reactio. Ergo mutua est attractio, nempe planetae attrahuntur a sole, et versa vice sol trahitur a planetis: satellites tendunt in planetas primarios, et contra planetae primarii in secundarios; ac proinde luna tendit in terram, et vicissim terra in lunam. Hanc mutuam lunae tellurisque attractionem demonstrant astronomicae observationes plurimae, sed explicata astronomiae doctrina tota res deinde facilius intelligetur. Quare mu-

tuam planetarum attractionem nunc generatim ostendere satis erit. Quum inter planetas primarios et secundarios, inter solem et planetas singulos actio sit reciproca, inter varios planetas actionem quoque mutuam esse, ex analogia naturae colligi potest. Hanc autem ratiocinationem, quae non satis firma fortasse videbitur, confirmant errores in saturni iovisque motibus ex mutua illorum actione oriundi. Pro varia planetarum illorum distantia a sole et a se invicem, pro diversa illorum mutua et respectu solis positione, multae in illorum motibus observantur inaequalitates, quae nulli alteri causae, quam mutuae attractioni tribui possunt. ¿Qua enim ratione alia fieri posset, ut planetae illi pro varia positione suos motus turbarent, nisi vi aliqua attrahente, quae in minoribus distantiis maior est, in maioribus autem minor? Errores in iovis et saturni motibus sese facilius astronomis conspicuos praebent. Certum enim est, planetas illos esse reliquorum omnium longe maximos, ac proinde et maior esse debet actio mutua. Sed huius attractionis legem in proximo articulo expendemus, et attractionis doctrinam magis ac magis declarabimus.

II. Vim attractivam, qua sese mutuo petunt corpora coelestia, inter corpora terrestria etiam vigere, ostenditur exemplo lunae. Satis accurate ponunt astronomi, lunam motu uniformi circa terram revolvi in circulo,

cuius radius aequalis est sexaginta semidiametris terrestribus. Itaque quum circulorum peripheriae sint inter se, ut radii, erit orbis lunaris circumferentia circuli maximi terrestris circumferentia sexagesies maior. Inventa autem est circuli maximi terrestris circumferentia pedum parisiensium 123249600, ac proinde nota est orbis lunaris peripheria, quae sexagesies maior est. Iam vero tempus periodicum lunae, quo nempe luna circa terram revolvitur, est dierum 27 horarum 7 minutorum primorum 43. Quia autem motus ponitur uniformis, facile invenitur spatium dato aliquo tempore descriptum, v. g. minuti unius primi tempore. Sunt enim spatia velocitate uniformi percursa directe, ut tempora. Quare per *regulam trium* dicatur: tempus totum periodicum lunae est ad tempus minuti unius primi, ut tota lunaris orbis peripheria ad eiusdem orbis arcum tempore minuti primi descriptum. Datis autem in proportione tribus terminis, datur et quartus. Ac proinde invenietur arcus minuti unius primi tempore descriptus, cuius arcus quadratum dividatur per lunaris orbis diametrum, et habebitur, (*ex demonstratis* §. *11.*) lineola *BC*, hoc est, vis centripeta lunae. Haec autem lineola inito calculo invenitur aequalis pedibus $15\frac{1}{12}$ parisiensibus. Nempe talis est vis centripeta lunae in distantia a terra semidiametrorum ter-

restrium sexaginta, ut luna, urgente vi illa, tempore minuti unius primi versus terram descenderet per spatium pedum 15 $\frac{1}{12}$. Iam fingamus, lunam *a circulari orbita in ellipticam deflectere, atque per eam accedere prope ipsam telluris superficiem ita, ut maxima lunae a telluris centro distantia sit, quam re ipsa habet, 60 semidiametrorum terrestrium; minima vero 1 semidiametri. Erit in ea hypothesi velocitas prope telluris superficiem sexagesies maior.* Sunt enim velocitates reciproce, ut perpendiculares ex centro virium in tangentes demissae (*cor. ad theor. 11.*). Itaque luna prope terram tempore sexagesies breviori, nempe minuto uno secundo *eumdem arcum percurreret, cuius proinde sinus versus idem esset et aequalis pedibus* 15 $\frac{1}{12}$. Dato enim spatio velocitates uniformes sunt inverse ut tempora (§. *11. art. 1. cap. 1.*). Igitur luna prope telluris superficiem uno minuto secundo descenderet per pedes 15 $\frac{1}{12}$, si, exstincta vi tangentiali, sola vi centripeta urgeretur. Sed hoc idem spatium eodem tempore percurrunt gravia terrestria. Igitur vis centripeta lunae et vis centripeta terrestris sunt eiusdem generis, quum eamdem utraque mensuram habeat eamdemque directionem. Ergo luna graviaque terrestria tendunt in terram, atque etiam se mu-

tuo trahunt corpora omnia terrestria, non secus ac faciunt coelestia per legem analogiae *.

III. Non solum in se mutuó tendunt corpora, sed etiam eadem vi mutua pollent omnes corporum partes, alioqui tota dissolveretur corporum tellurisque compages. Illa autem attractio non solum mutua est, sed etiam aequalis. Etenim distinguatur terrae moles in binas quascumque partes vel aequales vel utcumque inaequales. Iam si partium attractio mutua non foret, aut esset inaequalis; attractio minor cederet maiori, et partes coniunctae recta moveri pergerent in infinitum. Partes igitur sese mu-

* *Auctorem castigandum in hac demonstratione censui; quum non obscure significet, lunam in duabus praedictis distantiis ferri per orbitas circulares. Porro in ea hypothesi falsum est, velocitates esse in ratione inversa perpendiculorum in tangentes demissorum. Illa enim proportio non tenet, si corpus per circulos diversos circa idem centrum moveatur. Tunc enim velocitates sunt in ratione inversa subduplicata distantiarum seu radiorum. Praeterea in mea hypothesi ponitur, duos diversos arcus a circularibus haud abludere. Ponitur item, accelerationem motus per* $15 \frac{1}{12}$ *pedes nullam esse seu contemnendam in utroque casu. Quae omnia veritati valde consentanea sunt.*

tuo aequaliter urgent ita, ut actioni semper aequalis sit et contraria reactio, quae quidem omnia adlato iam antea magnetis exemplo illustrari possunt. Quod autem dictum est de binis utcumque terrae sectionibus, idem quoque intelligitur de aliis quibuscumque corporum partibus. Itaque attractionem universalem demonstrant phaenomena coelestia atque terrestria ita, ut hanc naturae legem in dubium vocare non possit ingenuus philosophus, quaecumque sit attractionis causa, quam deinde variis in locis data occasione expendemus. Haec doctrina mortalibus omnibus tamdiu ignota a Newtono tandem admirabili quadam felicitate in bono lumine collocata est. Exstiterant sane, qui ante ipsum attractionem nominarent. Keplerus, qui motum coelestium leges felicissime detexit, earum causas per *magnetismum* quemdam explicare conatus est. Verum quae hac de re protulit, tam incerta ratione deducta sunt, et plerumque etiam ita sunt absurda, ut cum iis comparata, quae Newtonus certissima methodo invenit, pro nullis omnino haberi debeant. Hinc newtonianae doctrinae parum doctos sese probant aliqui philosophi, qui haud satis aequi rerum aestimatores inventionis gloriam hac in re Newtono eripere conantur.

SOLVVNTVR OBIECTIONES.

Obiect. 1. Attractionis universalis doctrina maxime innititur prima Kepleri lege, qua nem-

pe statuitur, planetas primarios circa solem, secundarios circa primarios areas temporibus proportionales describere; atqui lex illa nequaquam observatur, immo attractionis doctrinae repugnat omnino. Et quidem in motibus iovis et saturni demonstrant observationes astronomicae variationes plurimas, quae areas temporibus proportionales maxime perturbant: tot mutationibus obnoxii sunt lunares motus, ut nulli fere legi subiiciantur: easdem mutationes patiuntur satellites iovis; ergo nulla exsistit in natura attractio mutua.

Resp. dist. min.: lex illa non observatur *accurate*, C. min. *quam proxime*, N. min. et cons. Re quidem vera erroribus plurimis obnoxii sunt corporum coelestium motus, sed errores illi attractionis doctrinam apprime confirmant, ut iam observavimus. Demonstratum quidem est, areas temporibus proportionales esse. Verum in hac demonstratione unius dumtaxat corporis vim centripetam consideravimus, neque errores ex mutua aliorum corporum attractione oriundos aestimavimus. Porro Kepleri legem aliquantulum perturbat mutua planetarum attractio, et praesertim in iove et saturno ob maiorem illorum massam. At aberrationes illae in minoribus dumtaxat planetarum distantiis conspicuae fiunt; quo magis autem a se invicem recedunt planetae, eo minores deprehenduntur errores, atque tandem evanescunt. Eadem est ratio, cur va-

riationes plurimas experiatur luna, ob variam scilicet telluris solisque positionem variamque illorum distantiam. Tandem varia satellitum iovialium positio diversaque distantia aliquam in illorum motibus mutationem adferre debent. Sed omnes illos errores ad calculum revocare norunt geometrae, quorum quidem diligentiam et peritiam demonstrant calculorum cum observationibus astronomicis summa consensio. Itaque ex praecedenti obiectione nihil aliud colligi potest, nisi pro varia corporum massa variaque distantia diversam quoque esse attractionem. Addere iam satis erit, probatam quoque manere vim attractivam, etiamsi corpora coelestia areas temporibus proportionales non describant. Evidens enim est ex demonstratis de virium compositione, sine vi aliqua centripeta nullum fieri posse motum curvilineum, quaecumque sit vis centripetae directio. Igitur curvilinei planetarum motus vim aliquam centripetam, ac proinde attractionem demonstrant.

Obiect. 2. Ex illa mutua attractione oriretur universi systematis planetarii confusio. Si enim planetae se mutuo attrahant, progressu temporis in se mutuo praecipites ruere debent, atque tandem in eamdem cum sole massam coalescere; ergo attractio mutua naturae ordini adversatur.

Resp. neg. ant. cuius probatio tota facile evanescit, si attendamus, planetas duabus

viribus urgeri, una secundum directionem tangentis, altera autem centripeta. Et quidem sine virium illarum compositione nullum orbem curvilineum describi posse, saepe saepius demonstravimus. Et certe sola vi centripeta in se mutuo ruerent corpora omnia, atque in rudem indigestamque molem tandem rediret totus huius universi ordo. At omnipotenti divinaque manu ita inter se temperati fuerunt coelestes motus, ut planetae in orbibus suis circa solem certa et admiranda lege regantur atque retineantur.

Inst. 1. Stellae fixae eamdem perpetuo a se invicem distantiam servant, suisque locis immotae manent; iis ergo nullus impressus est motus, ac proinde sola remaneret vis centripeta, qua stellae fixae in unum tandem coirent globum. Itaque sic argumentari licet: universam mundi compagem perturbaret attractio illa, qua stellae fixae in se mutuo tenderent, atque in unicam tandem coalescerent massam; atqui talis esset illarum attractio, nulla alia vi accedente; ergo ex fixarum attractione mutua confusio universi produceretur.

Resp. N. min. Etiamsi nullus stellis fixis impressus fuerit motus, tanta tamen esse potest stellarum a se invicem distantia, ut mutua attractio, quam ex distantia pendere observavimus, omnino evanescat. Praeterea certissimum est, stellas esse totidem soles proprio

lumine fulgentes, circa quos probabilissimum est, revolvi non secus ac circa solem nostrum diversa planetarum systemata. Si autem haec fiat hypothesis, iam facile intelligitur, stellas singulas in proprio virium centro quiescere, vel nihil fere moveri. Atque ex systematum omnium coniunctione et aequilibrio sua mundanae machinae constabit firmitas: luculentissimum sane divinae intelligentiae et omnipotentiae argumentum.

Obiect. 3. Attractio universalis inter corpora terrestria sese conspicua praeberet: globi duo in ipsa telluris superficie magno etiam dissiti intervallo ad se mutuo tenderent, atque tandem ad contactum pervenirent, non secus ac faciunt magnes et ferrum; atqui mutuus ille accessus non observatur; ergo fictitia est universalis attractio.

Resp. N. mai. Corpora quaelibet tendunt in se mutuo, sed tendunt quoque in terram. Porro attractionem universalem ex quantitate materiae pendere, iam observavimus, illamque attractionem, ceteris paribus, esse ut quantitatem materiae, in proximo articulo demonstrabimus. Itaque quum quantitas materiae in terra immense superet quantitatem materiae in praedictis globis; patet, attractionem globorum versus terram esse fere infinite magnam, si conferatur cum mutua globorum attractione, quae proinde tantilla est, ut sentiri nequaquam possit. At si tan-

ta sit corporum massa, ut cum ipsa quantitate materiae in terra satis magnam habeat rationem, iam sub sensus cadere poterit attractio. Magna observationum subtilitate hanc attractionem expertus est D. Bouguer unus ex doctissimis parisiensibus academicis, qui laboriosum aeternaque fama dignissimum iter adgressi sunt ad definiendam telluris figuram. Prope ingentem montem in Peruvio, qui dicitur *Chimboraco*, pendulum constituerat Vir clarissimus. Observavit autem, filum penduli septem minutis secundis cum dimidio a perpendiculo aberrare, ab ipso scilicet monte attractum. Quo autem artificio et quanta diligentia usus fuerit D. Bouguer, legere licet in eximio opere *de figura telluris*. Quod autem spectat ad exemplum magnetis et ferri, ad praesentem casum trahi non potest. Agitur enim de attractione universali. Attractio autem magnetica est alterius plane generis, et ad magnetem ferrumque dumtaxat pertinet. Haec pauca dicta sint de attractione universali, quae quidem ex tota huius capitis serie magis ac magis intelligetur, sed confirmabitur maxime, dum suo loco astronomicum systema explicabimus.

ARTICVLVS II.

De prima attractionis lege.

I.

Ad investigandam attractionis legem virium centralium doctrinam in circulo considerabimus. Hanc facili ratiocinatione demonstravit Newtonus. Ponamus, corpora duo in circulorum peripheriis revolvi. Haberi possunt circuli illi tamquam polygona similia ex lateribus numero infinitis et infinite parvis composita. Quare moveri intelligantur corpora in polygonorum suorum latere aliquo: seclusa vi centripeta, secundum huius lateris directionem pergerent in infinitum. Dum ergo ex latere uno polygoni in aliud latus proxime contiguum transeunt, vi centripeta in polygoni angulum incurrunt. Vis autem, qua polygoni angulum feriunt, est quantitas motus. Nempe ictus magnitudo est, ut massa per velocitatem multiplicata, eritque vis centralis tota, ut magnitudo ictus et numerus ictuum simul. At quo maior est velocitas, et quo minor circumferentia circuli, eo maior est ictuum numerus eodem tempore; ergo numerus ictuum est, ut velocitas directe et circumferentia inverse. Quare sit

Propositio I. VIS CENTRALIS, QVAE EST VT

ICTVS MAGNITVDO ET NVMERVS ICTVVM CONIVNCTIM, ERIT IN RATIONE COMPOSITA DIRECTA QVANTITATIS MOTVS ET VELOCITATIS, ATQVE INVERSA RADII; SIVE QVOD IDEM EST, VT PRODVCTVM EX MASSA IN QVADRATVM VELOCITATIS DIVISVM PER RADIVM.

Plurimae leguntur huius principii demonstrationes, sed hanc anteponimus, quae ex ipsa virium centralium natura facile derivatur. Iam corporum massae dicantur M, m, circulorum circumferentiae, C, c, velocitates V, v, tempora T, t, vires centrales F, f; circulorum radii R, r. Erit $F:f = \frac{MV^2}{R} : \frac{mv^2}{r}$. Quia vero in circulo velocitates sunt uniformes, ac proinde, ut spatia descripta, sive circumferentiae directe et tempora inverse; erit $V:v = \frac{C}{T} : \frac{c}{t} = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, ob circumferentias radiis proportionales. Quare tandem habebitur (*per substit.*) $F:f = \frac{MR^2}{RT^2} : \frac{mr^2}{rt^2}$ $= \frac{MR}{T^2} : \frac{mr}{t^2}$. Iam ponantur massae aequales:

erit $F : f = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, hoc est

Propositio II. ERVNT VIRES CENTRALES DIRECTE, VT CIRCVLORVM RADII, ET VT QVADRATA TEMPORVM INVERSE.

Fingantur vires centrales decrescere, ut crescunt quadrata distantiarum a centro, hoc est, ponantur vires centrales in ratione duplicata inversa distantiarum; erunt $F : f$ ut $\frac{M}{R^2} : \frac{m}{r^2}$, ac proinde in proportione praecedenti $F : f = \frac{MR}{T^2} \frac{mr}{t^2}$ erit $\frac{M}{R^2} : \frac{m}{r^2} = \frac{MR}{T^2} : \frac{mr}{t^2}$, positisque massis M, m aequalibus, fiet $\frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, ideoque $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$, hoc est

Propositio III. CVBI DISTANTIARVM SVNT, VT TEMPORVM QVADRATA, SI VIRES CENTRALES FVERINT VT DISTANTIARVM QVADRATA INVERSE.

Et vice versa si ponantur cubi distantiarum ut temporum quadrata; erit in praecedenti analogia $F : f = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, substituendo terminos proportionales, $F:f = \frac{R}{R^3} : \frac{r}{r^3} = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$. Nempe vires centrales sunt, ut quadrata distantiarum reciproce. Probe autem tenendae sunt hae duae virium centralium leges, quibus tota innititur astronomia.

Lex 1. SI CORPORVM IN CIRCVLIS REVOLVENTIVM VIRES CENTRALES FVERINT IN RATIONE DVPLICATA INVERSA DISTANTIARVM A CENTRO; ERVNT TEMPORVM PERIODICORVM SIVE REVOLVTIONVM QVADRATA, VT CVBI DISTANTIARVM.

Lex eadem inversa. SI TEMPORVM PERIODICORVM QVADRATA FVERINT, VT CVBI DISTANTIARVM; ERVNT VIRES CENTRALES IN RATIONE DVPLICATA INVERSA DISTANTIARVM.

Demonstratae hactenus virium centralium leges virorum non geometrarum oculis repraesentari solent ope machinae, quae virium centralium machina solet appellari. Hanc autem machinam, utpote oculis melius quam

explicatione ulla usurpandam praetermittimus.

Defin. 1. Notissima est omnibus curva, quae *ovalis* vulgo dicitur, a geometris autem *ellipsis* frequentius appellatur. Si per duo puncta, quae in ellipseos circumferentia a centro magis distant, ducta intelligatur recta, quae per ellipseos centrum transeat, haec dicitur *axis maior*, ad quem si perpendiculariter erigatur recta per centrum transiens, et ad circumferentiam utrimque terminata, haec vocabitur *axis minor*. Iam vero si ex duabus axis minoris extremitatibus hinc et inde ad partes centri oppositas ducta intelligatur recta secans axem maiorem, quae recta aequalis sit dimidio axi maiori, habebuntur in punctis intersectionum axis maioris puncta duo, quae ellipseos *foci* appellantur. His praemissis definitionibus, ex observationibus astronomicis notum est, planetas revolvi in ellipsibus, quarum focum unum communem sol occupat. Quamvis autem haec sola curva coelestibus motibus accuratissime respondeat; quia tamen circularis planetarum orbita non multum ab astronomicis observationibus aberrat, immo nihil fere in quibusdam planetis; in praesentia sine errore hanc hypothesim, quae ad veritatem proxime accedit, facere licet. His explicatis sit

CONCLVSIO.

ATTRACTIONIS VNIVERSALIS LEX EST, VT CORPORA OMNIA SESE ATTRAHANT IN RATIONE DIRECTA MASSARVM ET DVPLICATA INVERSA DISTANTIARVM.

Pars 1.a conclusionis apertissime patet. (concl. art. praec.) Consensus enim et harmonia totius systematis solaris confirmant, planetas omnes cometasque magis a sole, quam ab aliis planetis attrahi; propterea quod ob maiorem massam maiori attractionis vi sol praeditus sit. Immo inter planetas oriuntur maiores perturbationes a mutua attractione provenientes, quo maior est illorum massa.

Demonst. 2. pars. Planetae revolvuntur in ellipsibus circa solem, quarum focum unum communem sol occupat. Haec autem curva a planetis circa solem descripta praedictam attractionis legem omnino postulat. Demonstrant scilicet geometrae, corpus aliquod in ellipsi revolvi non posse vi tendente ad focum, nisi vis centripeta decrescat in ratione duplicata distantiarum ab eodem foco. At quum haec demonstratio pendeat ex ipsa ellipseos natura, de qua pauca tradidimus, satius est, planetarum orbitas velut circulares considerare, quod quidem satis accurate fieri posse, iam observavimus. Porro demonstrant observationes astronomicae, temporum periodicorum quadrata in planetis esse, ut cu-

bi distantiarum a sole. Ergo vis planetarum in solem decrescit in ratione, qua crescunt quadrata distantiarum a sole, seu est in ratione inversa duplicata distantiarum a sole: Haec temporum periodicorum et distantiarum ratio, quae celeberrimo Keplero debetur, appellari solet *lex secunda Kepleri.* Hanc autem legem non solum servant planetae primarii circa solem, sed etiam planetae secundarii circa primarios. Mutuam planetarum perturbationem lunaresque inaequalitates laboriosissimo et fere insuperabili calculo in hac attractionis lege nuperrime investigarunt doctissimi viri, et calculum cum observationibus astronomicis accurate consentire, testantur diligentissimi astronomi; immo eo pervenit, quod sperare vix fas erat, doctissimus mihique amicissimus dominus Clairaut, ut cometarum reditum praedicere astronomos docuerit. Neque celeberrimi viri laborem fefellit eventus, quum anno proxime elapso 1759 paucorum dierum intervallo a calculis aberraverit reditus cometae, qui anno 1682 apparuerat. Quae quum ita sint, newtonianam attractionis legem demonstrant observationes astronomicae, neque eam in dubium vocare possunt, qui demonstrationis vim sentiunt.

II. Eamdem attractionis legem terrestribus quoque corporibus convenire ex analogia naturae colligi potest. At rem ipso corporum terrestrium exemplo ostendamus. Quod ut fiat, in memoriam revocandum est, vim centripetam

lunae esse eiusdem generis cum gravitate terrestri; vi enim centripeta describeret luna pedes $15\frac{1}{12}$ minuto uno secundo, non secus ac faciunt corpora terrestria (§. *11. prob. concl. art. 1.*) Iam vero investigari poterit spatium vi eadem centripeta lunari prope terram descriptum tempore minuti unius primi seu minutorum secundorum sexaginta. Etenim compertum est experimentis, gravia terrestria hac lege descendere, ut nempe spatia descripta semper sint, ut quadrata temporum. Quare per regulam trium dicatur $1'' : 15\frac{1}{12} = 60 \times 60'' : 15\frac{1}{12} \times 60 \times 60$. In hac proportione virgulae $''$ designant minuta secunda, quemadmodum virgula $'$ designare solet minuta prima. Itaque spatium minuti unius primi tempore prope terram a luna descriptum erit ut $15\frac{1}{12} \times 60 \times 60$; sed spatium a luna eodem tempore descriptum in distantia a terra semidiametrorum 60 est $15\frac{1}{12}$. Quare quum vires *utcumque acceleratrices, dummodo sint constantes* sint, ut spatia iisdem temporibus descripta; erit vis centripeta lunae in telluris superficie ad vim centripetam in distantia semidiametrorum terrestrium sexaginta, ut $15\frac{1}{12} \times 60 \times 60$ ad $15\frac{1}{12}$; seu ut 60×60 ad 1. Quare si semidiameter terrestris reprae-

sentetur per 1, erit distantia mediocris lunae a terra ut 60, ac proinde 60 × 60 erit huius distantiae quadratum. Quare quum quadratum unitatis sit 1, erit vis centripeta lunae in superficie telluris ad vim centripetam lunae in distantia mediocri a terra, ut mediocris distantiae quadratum ad quadratum semidiametri terrestris, hoc est, in ratione duplicata inversa distantiae. Itaque eadem lex obtinet quoque in corporibus terrestribus. Porro observandum est, attractionem considerari posse vel in corpore attrahente vel in corpore, quod attrahitur. Si primum, vis illa *attractionis* nomen retinet; si secundum, *gravitas* appellatur. Quia autem omnis attractio mutua est, patet, hanc esse universalem gravitatis legem, ut nempe se habeat in ratione directa massae et duplicata inversa distantiae.

SOLVVNTVR OBIECTIONES.

Obiect. 1. Praedictam attractionis legem demonstrare non possunt astronomorum calculi atque observationes, nisi cognitae sint planetarum massae. Ita enim componi potest massarum et distantiarum ratio, ut eadem prodeant phaenomena, atqui cognita non est planetarum massa. ¿Qua etenim ratione corporum remotissimorum massae explorari, atque, ut ita dicam, ponderari possunt? ergo statuta attractionis lex fictitia prorsus est.

Resp. neg. mai. et min. Et I.° quidem, ut definiri possit lex attractionis, satis est, observationibus astronomicis innotescere curvilineas planetarum orbitas illorumque tempora periodica, ut ex praecedentibus demonstrationibus patet: sed haec duo certissimis observationibus constant; ergo ad determinandam generalem gravitatis legem necessarium non est, perspectas esse planetarum massas. II.° Quamvis imperito hominum vulgo res absurda videatur, planetarum massas ad calculum revocare; geometris tamen non desunt methodi, quibus id obtinere possunt. Methodum ex praemissis principiis facile colligendam heic explicare non abs re erit. Sint planetae duo, *M*, *m*, quos comitentur satellites ad distantias *A*, *a* revolventes, temporibus *T*, *t*; erunt satellitum vires centripetae $=\frac{M}{A^2}:\frac{m}{a^2}$; sunt enim attractiones versus *M*, *m* in ratione directa corporis attrahentis et duplicata inversa distantiae. Praeterea vis centrifuga aequalis est vi centripetae, et satellitum vires centrifugae sunt $=\frac{A}{T^2}:\frac{a}{t^2}$ (§. *I. art. II.*). Quare erit $\frac{M}{A^2}:\frac{m}{a^2}=\frac{A}{T^2}:\frac{a}{t^2}$. Hinc data ratione *A* ad *a*, et *T* ad *t*, dabitur quoque ratio *M* ad *m*,

nempe ratio massarum in duobus planetis primariis *. Itaque hoc modo innotescere pot-

* *Etiamsi demonstratio praesens legitima sit ad dignoscendam rationem massarum in planetis, eaque utantur astronomi, posita attractionis lege, qualis in conclusione statuitur; vitiosa tamen est in nostro casu, quum tota fulciatur analogiae*: $F ; f = \frac{M}{A^2} : \frac{m}{a^2}$, *quae in obiectione negatur, et de qua disceptatio est. Responsio ad obiectionem haec est, nempe: lex attractionis in ratione inversa duplicata distantiarum manet demonstrata exemplo lunae et corporis terrestris, posito uno eodemque corpore attrahente, scilicet tellure. Praeterea praedictam legem esse eamdem in planetis aliis, neque ex diversa massarum distantiarumque combinatione variari, ex motu eorum per ellipses apertum est. Altera autem conclusionis pars, quod nempe attractio sit in ratione directa corporis attrahentis, ex eo constat, quod sol, cuius massa proculdubio est omnium planetarum maxima, sit etiam eorum omnium centrum gravitatis commune: ex eo etiam, quod nulla observetur attractio mutua corporum terrestrium, propterea quod immane superetur a communi eorum in tellurem attractione item ex eo, quod attractio sit*

erit ratio massarum in iove, saturno, terra, et sole ipso. Illi enim planetae suos habent satellites, ne excepto quidem sole, circa quem planetae tamquam satellites revolvuntur. Praeterea etiam datur ratio distantiarum satellitum a planetis primariis, atque eorumdem satellitum tempora periodica. Ex his principiis innotuit, quantitates materiae in sole, iove, saturno et terra esse inter se, ut numeri sequentes 199244 : 221 004 : 60, 813 : 1. Verum haec methodus valet dumtaxat in planetis, qui satellites habent. Hinc in mercurio, venere, et marte, quum satellitibus careant, quantum hactenus per observationes indicium ferre licet, non ita accurate innotescit massarum ratio *. Hanc quidem methodum explicare placuit, tum ob rei ipsius utilitatem,

propria elementorum materiae. Vnde corpus quodlibet terrestre a gravitate actum, ab omnibus elementis massae telluris attractum incedit per diagonalem motus compositi, seu per lineam perpendicularem ad horizontem. Constat etiam argumentis aliis, quae omittere non debuissset Auctor in probatione conclusionis, ubi totus est in probanda tantum secunda illi us parte.

* *Massae tamen illorum hoc pacto aestimari solent. Mars sumitur* $\frac{1}{5}$ *telluris; venus telluri aequalis; mercurius* $\frac{1}{2}$

tum ut vobis demonstretur superba quorumdam hominum imperitia, qui velut absurdum ridiculumque traducunt, quod ipsi non intelligunt, a quo quidem gravissimo errore vos longe alienos volo.

Obiect. 2. Lex attractionis in ratione distantiarum duplicata decrescentis contraria omnino est gravitatis terrestris legi. Etenim experimentis constat, vim gravitatis in eodem terrae loco et in diversis a tellure distantiis eamdem manere. Si corpus aliquod manu sustineamus sive in summa turri sive in ima, eamdem pressionem sentimus. Crassior quidem est haec aestimatio; at res accuratius definiri potest. Si in summa turri staterae brachiis imponantur corpora duo, quae sint in aequilibrio, deinde corpus alterutrum e lance ipsa filo suspendamus, ac paullatim demittamus; aequilibrium manere experimur in diversis etiam a terra distantiis. Quare sic argumentari licet; attractio illa non decrescit in ratione distantiarum duplicata, quae in diversis a tellure distantiis eadem observatur; atqui ex praedicto experimento constat, eamdem manere attractionem in diversis a tellure distantiis; ergo falsa est lex attractionis in conclusione adducta.

Resp. dist. mai. si distantiarum differentia fuerit satis magna, C. mai. secus, N. mai. et dist. min. N. cons. Quamvis gravitas terrestris decrescat in ratione distantiarum du-

Fig. plicata a centro telluris; in exiguis tamen a terra distantiis gravitatem terrestrem, velut constantem et perpetuo eandem considerare licet. Etenim tantilla est distantiarum, in quibus experimenta sumi possunt, differentia, ut pro nulla omnino haberi debeat, si cum integra telluris semidiametro conferatur. Quod exemplo patebit. Ponamus, haberi experimentum in vertice montis omnino altissimi insularum canariarum dicti *Pico de Tenerif*, cuius altitudo sit trium milliarium. Iam vero semidiameter telluris ponatur circiter quatermille milliarium. Sumtis quadratis erit gravitas in montis vertice ad gravitatem in montis radice, ut 16000000 ad 16024009, quae quidem ratio est quam proxime ratio aequalitatis ita, ut gravitatis differentia nullo experimento sentiri possit. Ceterum de gravitate constante illiusque directione tractabimus in capite sequenti. Quare haec pauca dicta sint.

Obiect. 3. Ad demonstrandam gravitatis legem hac ratiocinatione utuntur plerique phy-
6. sici. Sit *A* punctum, a quo undique emanet qualitas quaelibet secundum rectas *AB*, *AC*, *AD* cet. per totum spatium indefinite protensas. Iam vis huius qualitatis decrescit in ratione duplicata distantiae; nempe erit vis illa in *D* ad vim in *G*, ut quadratum distantiae *AG* ad quadratum distantiae *AD*. Etenim quum (*ex hypothesi*) qualitas

undique in orbem per lineas rectas diffundatur; evidens est, qualitatis huius vim seu intensitatem eo maiorem esse, quo maiori copia, confertiusque accumulantur eiusdem qualitatis radii. Sed quum idem sit in unaquaque superficie *HDB*, *KGE*, radiorum numerus, patet radios illos eo confertiores esse, quo minor est circulorum superficies, ita ut spissitudo sive densitas radiorum semper sit in ratione reciproca superficierum; sed circulorum superficies sunt in ratione duplicata radiorum; ergo virtus e centro propagata, quae est, ut circulorum superficies reciproce, erit, ut quadratum distantiae a centro inverse. Hoc argumento utuntur physici fere omnes, et a solis planetarumque attractiones adlatam demonstrationem transferunt. Ex quibus ita argumentari licet: in sententia physicorum attractionem eiusque leges propugnantium, ea instar effluviorum propagatur; atqui absurda est effluviorum emanatio et propagatio, ergo fictitia est lex attractionis.

Resp. ad totam huius argumenti seriem. Frustra nobis obiici praecedentem demonstrationem, quam non solum non adhibemus, sed contra longe reiicimus. Et quidem reprehendi omnino debet talis huius demonstrationis usus, qui tamen in plerisque physicorum libris legitur. Praecedens demonstratio transferri quidem potest ad propagationem luminis, cuius intensitas decrescit in ra-

tione duplicata distantiarum a puncto radiante. Verum proculdubio errant physici, qui de omnibus qualitatibus a dato puncto in sphaeram diffusis eamdem legem pronuntiant. Et certe id verum non est, nisi addatur, qualitatem illam progredi motu uniformi, et nullam eius partem sisti vel dissipari. Si enim celeritas mutetur, radii, qui dato aliquo tempore in orbe uno concluduntur, non continebuntur in orbe altero, sed magis vel minus, prout retardabitur motus vel accelerabitur. A vero igitur aberrant, qui ad aestimandam quantitatem odoris e dato globo emissi, adsumunt odoris intensitatem decrescere in ratione duplicata distantiarum. Neque enim verisimile est, motu uniformi recta progredi odoriferas particulas, quarum plurimae circa ipsum corpus, a quo emanant, haerent, ipsi aëri admixtae; aliae autem spirante vento inde avelluntur, et longius abeunt. Sed multo minus ad definiendam attractionis legem trahi potest praecedens demonstratio. Et quidem attractio considerari non potest qualitatis instar per radios diffusae. Praeterea intelligi nequaquam potest, quid ad attractionem conferre valeat illa corpusculorum emissio. Hanc obiectionem adferre placuit, ut moneantur studiosi adolescentes, philosophicis ratiocinationibus non temere et sine examine credendum esse.

ARTICVLVS III.

De altera attractionis specie.

I.

In praecedenti articulo illam dumtaxat considerabimus attractionem, quae inter magna corpora et ad distantias satis magnas exercetur. At inter minimas corporum particulas in ipso contactu et in minimis intervallis viget potentissima attractio, cuius legem investigabimus. Sed praetermittenda sunt experimenta aliqua. Inter minimas fluidorum particulas mutuam attractionem exerceri, demonstrat ipsa guttarum fluidarum tenacitas atque rotunditas. Duae guttae fluidae in minima distantia sese attrahunt, et in maiorem guttam coalescunt. Eamdem mutuam attractionem inter corpora dura et fluida ostendunt etiam experimenta. Si lamella vitrea superficies aquae admoveatur ita, ut ipsam aquam lambat, non sine conatu aliquo lamellam ab aqua distrahi posse sentiemus: nempe per totam lamellae superficiem minimae aquae columnae adhaerescunt, quae tandem aucta vel tantisper distantia, proprio pondere relabuntur. Neque praetermittenda sunt praeclarissima de lucis inflexione et attractione experimenta. Si in cubiculo undique clauso et satis tenebroso per foramen exiguum admittantur solares radii,

Fig. qui deinde prope corporis alicuius aciem transeant, radius aciei proximior vi maxima a corpore attrahetur atque inflectetur, et postea reflectetur: ordine succedent radii alii, qui attrahentur minus, donec, crescente paullulum distantia, oculorum aciem fugiat attractio. Inter corpora dura eamdem attractionis speciem vigere, demonstrant vulgatissima experimenta. Si duae lamellae vitreae sibi invicem arcte approximantur, lamellas illas non sine magno conatu a se mutuo avelli posse, experiemur, atque etiam attractionem quamdam sentimus, licet subtilissimis filis separatae sint lamellae; sed crescente tandem filorum crassitudine, attractio omnis evanescit. Probe notari debent haec experimenta illorumque conditiones. In omni corporum specie inter corpora quaelibet haec attractio exercetur, sed ea conditione, ut in contactu et prope contactum sit maxima; in distantiis autem etiam valde exiguis evanescat.

II. Demonstrata in articulo praecedenti attractionis lex descriptis experimentis satisfacere non potest. Etenim intelligantur coni similes *PAEa*, *PMBm*, quorum vertex communis *P*. Ponantur singulae conorum partes attrahi versus *P* in ratione duplicata inversa distantiarum, fingaturque, conos illos dividi in superficies innumeras circulares. Erit attractio superficiei *Mm*, ad attractionem superficiei *Aa*, ut superficies ipsae directe et

7. miles *PAEa*, *PMBm*, quorum vertex communis *P*.

quadrata distantiarum inverse (*ex hypothesi*). Sunt autem superficies, ut quadrata diametrorum, et ob triangula PMm, PAa similia diametri sunt ut distantiae; ergo attractiones sunt, ut quadrata distantiarum directe, et earumdem distantiarum quadrata inverse. Nempe attractio superficiei Aa erit ad attractionem superficiei Mm, ut $\frac{PA^2}{PA^2}$ ad $\frac{PM^2}{PM^2}$, hoc est, ut $\frac{PA_2}{PA^2}$ ad $\frac{PA^2}{PA^2}$, scilicet in ratione aequalitatis. Quare si attractio, quae in distantia qualibet eadem manet, dicatur R erit attractio coni truncati $Ma = Am$ ad attractionem coni PMm, ut $R \times MA$ ad $R \times PM$, sive ut MA ad PM. Ac proinde si fuerint PM, MA aequales, attractio in contactu P haud erit validior, quam in qualibet a contactu distantia, quod quidem manifeste repugnat recensitis experimentis.

III. Prima attractionis species, de qua in articulo praecedenti sermonem habuimus, pendet ex quantitate materiae. At praesens attractio in minimis dumtaxat exercetur intervallis, ac proinde ad eas non extenditur eiusdem etiam corporis particulas, quae sunt a contactu longius positae. Itaque licet haec attractio certam quoque distantiarum legem servare debeat, illae tamen distantiae non a

corporum centro, sed ab ipsa superficie computandae sunt. Atque hoc alterum est discrimen inter utramque attractionis speciem. Etenim dum in praecedenti capite diximus, attractionem esse in ratione duplicata inversa distantiae, hanc distantiam ab ipsa corporum superficie aestimare non licet, nisi corporum diametri cum mutua corporum distantia comparatae rationem valde exiguam habuerint, quod quidem in praecedenti capite ponebamus. Iam vero mutuam sphaerarum attractionem considerabimus. Intelligatur corpusculum aliquod extra sphaeram positum, et a singulis sphaerae particulis attractum in ratione distantiarum duplicata inversa. Fingatur, sphaeram illam considerari ita, ut tota coëat in centrum, partes anteriores a corpusculo recedentes aliquam vis attractivae partem amittunt, in ratione scilicet duplicata semidiametri; sed hanc mutuam attractionem lucrantur partes aliae oppositae ita, ut attractionis decrementum ex una parte incremento ex parte altera compensetur. Quare eadem manet attractio tota, sive partes circa centrum dispergantur, sive in centro colligantur. Quia vero quaelibet materiae particula aliam quamlibet attrahit in ratione duplicata inversa distantiae, evidens est, corpusculum in utroque casu eadem lege a sphaera attrahi, nempe in ratione duplicata inversa distantiae a centro. Quum eadem ratiocinatio

de sphaeris duabus institui possit, patet, sphaeras duas sese mutuo attrahere in ratione duplicata inversa distantiarum a centro, non vero ab ipsa superficie *. Hanc attractionis legem ratiocinatione magis geometrica demonstrant philosophi, qui attractionis doctrinam sublimiori modo explicant. Nobis vero, quibus difficiliora tractare non licet, rem indicasse satis sit. Iam vero utriusque attractionis constituto discrimine, sit

* *Ne maioris moliminis demonstrationem ineant studiosi adolescentes, qua praedictam legem in sphaeris comprobavit Newtonus, huic Auctoris argumento in praesentia adquiescere possunt. Sed tamen interea caveant, ne illam veram demonstrationem existiment; quum non sit nisi purus putusque paralogismus. Haec quidem demonstratio locum tenet in mechanica, dum invenitur centrum gravitatis in corporibus, eaque utitur inter mechanicos facile princeps nostras Georgius Joan.* exam. marit. lib. I. cap. III. pp. XV. XVI. et cc. *At vero tunc vires sunt in ratione simplici distantiarum. Sed si quis idem ad legem virium in ratione inversa duplicata distantiarum transferre vellet, paralogismum pro demonstratione obtrudet.*

CONCLVSIO.

Praeter attractionis legem in ratione distantiarvm dvplicata decrescentem, admittenda est lex altera in ratione plvsqvam dvplicata decrescens.

Demonstratur I. Attractio illa satis non est, quae omnibus attractionis effectibus non satisfacit; atqui attractio universalis eiusque leges omnibus attractionis effectibus non satisfaciunt; ergo vera est conclusio. Maior est evidens. Minor autem patet ex phaenomenis modo recensitis, et ex aliis iam iam declarandis. Si vis attractiva decresceret in sola ratione duplicata distantiarum, paullo maior foret vis illa in contactu, quam in exiguis a contactu distantiis, quod repugnat experimentis. Harum virium rationem ex radiorum lucis inflexionis calculo aestimavit Newtonus, et invenit, in minimis a contactu distantiis attractionem esse ad vim gravitatis, ut 1000000000000000000 ad unitatem. Quae quidem tanta virium differentia eidem attractionis legi tribuenda non est. II.° Quoniam haec vis attractiva in contactu dumtaxat vel prope contactum exercetur, evidens est, corporis attrahentis massam ad maiorem attractionem nihil conferre, sed contactus ma-

gnitudini attractio illa proportionalis est. Quia tamen minimae particulae non longe a contactu neque extra ipsos attractionis limites sunt positae, attractionem auget minimarum particularum densitas. Hinc si marmora duo iungantur, et oleo vel pice aut etiam aqua perfundantur, validius inter se cohaerent ob auctam contactus magnitudinem. Augetur cohaesio, si calefiant liquores, quibus superficies imbuuntur. Hoc enim artificio poros altius penetrant liquorum particulae: minima interstitia facilius subeunt: augetur minimarum partium densitas, ideoque et attractio. En alterum utriusque attractionis discrimen. Prima enim attractio quantitati materiae proportionalis est, non autem contactus quantitati. Itaque in minimis particulis attractio est, ut densitas particularum et superficies simul, ceteris paribus. Quia vero superficies sunt ut quadrata diametrorum, soliditates autem ut earumdem diametrorum cubi; evidens est, minimas particulas, quae ratione soliditatis maiorem habent superficiem, fortius cohaerere, contra corpuscula, quorum minor est contactus, quales sunt minimi globuli eximie perpoliti, facilius a se invicem distrahuntur, atque hinc fluiditatis rationem reddunt aliqui physici. Sed hac de re in physices progressu sermonem habebimus.

Si quis autem a nobis requirat talem attractionis legem, quae in minimis magnisque

distantiis possit phaenomenis satisfacere; haud difficile erit demonstrare, innumeras esse posse huius attractionis leges; quaenam vero in rerum natura obtineat, nulla experimentorum subtilitate definiri potest. Legem unicam in exemplum adferre satis erit. Ponamus, legem attractionis ex duobus terminis esse compositam, quorum primus sit ut quadratum distantiae inverse, alter autem ut distantiae cubus etiam inverse. Iam si distantia dicatur D, erit in hac hypothesi lex attractionis $\frac{A}{D^2} + \frac{B}{D^3}$, litterae A et B designant quantitates quaslibet finitas. Fingamus distantiam minimam seu infinitesimam; erit D^2 quantitas infinitesima ordinis secundi, et D^3 quantitas infinitesima ordinis tertii. Quare evidens est, quantitatem $\frac{B}{D^3}$ esse infinitam, si conferatur cum $\frac{A}{D^2}$. Proinde in distantiis minimis evanescit ratio duplicata inversa distantiae. Rursus si distantia ponatur valde magna, erit D^3 quantitas maxima, si conferatur cum D^2. Igitur $\frac{B}{D^3}$ erit quantitas mini-

ma respectu $\frac{A}{D^2}$, ideoque in distantiis maximis sola valebit ratio duplicata inversa distantiae. Quare si talem fingamus attractionis legem ex duobus terminis compositam, quorum unus exprimat rationem duplicatam inversam distantiarum, alter autem inversam triplicatam, evidens est, talem legis compositionem ita se habere, ut in contactu minimisque distantiis sola vigeat attractio in ratione triplicata inversa, in distantiis autem paullo maioribus sola supersit attractio in ratione inversa duplicata. At diligenter observandum est, propositam attractionis legem exempli loco dumtaxat habendam esse. Infinitae enim huiusmodi leges excogitari possunt. Praeterea si proposita lex accurate servaretur, attractio in contactu tanta foret, ut corporum cohaesio nullo pondere frangi posset; foret enim cohaesio respectu gravitatis infinita, quod est absurdum. Igitur patet, hanc attractionis legem considerari posse tamquam exemplum, quo intelligatur, minime repugnare talem attractionis legem ex ratione duplicata inversa distantiarum compositam et ex alio termino ita, ut in contactu vel prope contactum secundus legis terminus habeat ad primum rationem valde magnam, non tamen infinitam. Contra autem in distantiis paullo maioribus primus terminus ad secun-

dum habeat rationem valde magnam sed tamen finitam. Verum, ut iam supra observavimus, legem hanc licet re ipsa exsistentem, et minime commentitiam nemini divinare hactenus licuit, neque umquam fortasse licebit.

SOLVVNTVR OBIECTIOEES.

Obiect. I. Admittenda non est lex illa, quae analogiae naturae repugnat; atqui haec nova attractionis lex analogiae naturae repugnat; ergo non est admittenda. Probo minorem. Vniversalissima naturae lex est attractio decrescens in ratione duplicata distantiarum: repugnante ergo analogia naturae, alia fingitur lex omnino ignota et mere arbitraria.

Resp. Neg. min., ad cuius probationem dico, optimam quidem philosophandi regulam esse naturae analogiam, sed ea abutendum non esse. Neque enim contra hanc philosophandi regulam peccatur, si alias admittamus leges, quas phaenomena omnino postulant. Praeterea simplicitati et analogiae naturae minime obstat praedicta lex ex duobus terminis composita. Haec enim tamquam simplicissima et unica naturae lex haberi debet. Sed quidquid sit, ¿supremo rerum omnium creatori leges quis audebit praescribere? Deus Optimus Maximus eas, quas et quot voluit, leges ad consequendos in creatione praestitu-

tos fines sapientissime constituit. Et certe vis magnetica et electrica ad generalem attractionis legem revocari nequaquam possunt. Itaque analogia naturae perperam abuteretur, qui omnia attractionis phaenomena ad unicam legem reducere tentaret. Natura quidem simplex est, sed simplicitatem hanc solus novit supremus naturae auctor, qui res omnes illarumque relationes unico intuitu perspicit. Naturae simplicitatem intueri datum non est nobis mortalibus, qui facta dumtaxat seorsum consideremus, sed rerum causarumque nexum ignoramus.

Obiect. 2. Demonstrant geometrae, singulas sphaerarum particulas ipsasque etiam sphaeras attrahi in ratione duplicata inversa distantiarum. Ita telluris globus suam attractionem exercet in ratione duplicata inversa distantiae, et singulae globi terrestris particulae eamdem servant attractionis legem; at si lex attractionis ex duobus componatur terminis, iam attractio particularum et sphaerae totius eadem non est; ergo fictitia est lex illa attractionis, quae functione ex duobus terminis composita constat.

Resp. C. mai. N. min. Eamdem quidem legem artractionis in sphaeris et sphaerarum particulis demonstrant geometrae, et nos quoque facili ratiocinatione ostendimus. At corporis totius singularumque partium eamdem esse legem in solis sphaeris dumtaxat invene-

runt physici ; minime vero in sphaeroidibus aliisque corporibus, quae in rerum natura occurrunt. Et quidem si ponamus, singulas materiae particulas, quae corpus aliquod componunt, trahere punctum aliquod datum ad distantiam quamlibet; evidens est, singulas corporis attrahentis particulas respectu puncti attracti diversimode positas esse, ac proinde particularum vires diversam habere directionem diversamque mensuram. Quare quum attractio tota versus punctum aliquod nihil aliud sit, quam vis unica ex viribus singulis proveniens, et in datam directionem unicam composita; patet, in diversis corporibus pro varia partium positione diversam quoque esse posse attractionis legem. Et re quidem ipsa haec attractionis lex in ratione scilicet directa massae et duplicata inversa distantiae in paucissimis dumtaxat corporibus obtinet, e.g. in sphaeris quotcumque magnis, quod iam demonstratum est. Tandem haec obiectio ad nostrae conclusionis sensum minime accommodata est. Re quidem vera singulae sphaerarum particulae et sphaerae ipsae a puncto aliquo attrahuntur in ratione duplicata inversa distantiarum; sed in hac conclusione sermo est de mutua particularum attractione inter se et in minimis distantiis vel in contactu.

Inst. 1. Ex praecedenti responsione deduceretur, nulla corpora vel saltem paucis-

sima sese attrahere in ratione distantiarum inversa duplicata. Etenim hanc attractionis legem in solis sphaeris invenerunt geometrae; atqui id repugnat alteri conclusioni, in qua praedictam attractionis legem constituimus; ergo nulla est conclusio.

Resp. N. min. Hanc quidem attractionis legem in corporibus coelestibus vigere, ex observationibus astronomicis demonstravimus. Nec minus invicte in corporibus terrestribus eamdem attractionem ostendimus. Corpora scilicet trahuntur a terra in ratione duplicata inversa distantiarum, et vice versa. Neque obstat corporum terrestrium figura. Si enim corpora illa conferantur cum tota telluris massa, velut corpuscula minimaeque particulae haberi debent, illorumque proinde negligenda est figura. Quod autem spectat ad terrae corporumque coelestium figuram, eam velut proxime sphaericam considerare licet. Quamvis ergo paucissima sint corpora, in quibus lex illa accuratissime servari possit, hanc tamen legem physice obtinere certissimum est.

Inst. 2. Ex attractionis lege in ratione triplicata inversa distantiae colligeretur, corpora duo quaelibet in minimis distantiis sese validissime attrahere, et ad contactum tandem pervenire debere: praeterea corpora duo contigua tenacissime cohaererent, et vi infinita; atqui haec duo experimentis repugnant; ergo talis

lex de ratione inversa triplicata distantiarum absurda omnino est.

Resp. N. mai. Viget quidem potentissima attractio inter minimas particulas in minimis distantiis. At si corpora magna fuerint, vis attractiva in proximis dumtaxat minimisque particulis residet. Porro si corpora duo eadem vi moveantur; velocitates illorum sunt in ratione inversa massarum. Quare si corpora duo dicantur *A*, *B*, minimae particulae *C*, *D*; velocitas, qua corpus *A* tendit ad *B*, est ad velocitatem, qua particula *C* solitarie spectata tenderet ad *B*, ut particula *C* ad corpus *A*. Igitur ob corporis magnitudinem fere infinitam respectu particulae; patet, inter magna corpora hanc alteram attractionis speciem ne in minimis quidem distantiis exerceri posse. Atque hinc aliqui philosophi rationem reddunt principii chemici: *sales non agunt nisi soluti*. Tandem neque in contactu inter corpora quaelibet viget attractio. Etenim attractio illa est, ut contactus magnitudo directe, et ut cubus distantiarum inverse. Quare si contactus magnitudo fuerit valde exigua et fere infinite parva; iam patet, attractionem fore etiam infinite parvam vel nullam. Neque in ullo casu attractio erit infinita. Probe enim meminisse oportet, quod iam monuimus, rationem triplicatam distantiarum exempli loco dumtaxat habendam esse. Admittenda est lex attractio-

nis, quae non solum aliquam distantiarum dignitatem contineat, sed alias quoque tali modo admixtas habeat quantitates, ut attractio in contactu sit valde magna, non autem infinita. Talis autem quantitatum permixtio appellari solet ab algebristis *functio*. Porro evidens est, innumeras fingi posse huius legis functiones, quae huic conditioni satisfaciant. Quidquid ergo hactenus diximus, non in eo sensu intelligendum est, quasi veram huius attractionis legem determinare velimus. Hoc unum nobis erat demonstrandum, praeter legem attractionis in duplicata distantiarum ratione decrescentis, aliam quoque legem admittendam esse.

Obiect. 3. Corpuscula aliqua in contactu et in minimis distantiis sese repellunt. Quod quidem patet corporum elasticorum exemplo, et maxime radiorum solarium reflexione. Immo non desunt subtilissimi doctissimique philosophi *, qui vim attractivam in omnium corporum particulis ad certos usque limites admittunt: quam vim attractivam deinde in repulsivam abire adfirmant ita, ut nullus omnino sit in rerum natura physicus immediatusque contactus. Vnde sic argumentari licet: tamquam universalis naturae lex admitti non debet attractio,

* *Ii sunt boschovichiani, quorum princeps fuit P. Boschovichius cum Auctore nostro intima familiaritate coniunctus.*

si corpuscula aliqua, immo omnia secundum aliquos philosophos vim repulsivam demonstrent; atqui experimentis manifesta fit in corporibus vis repulsiva; ergo attractio non est naturae universalis lex.

Resp. N. mai. Vis attractiva negari non potest ab iis etiam philosophis, qui in omnibus corporum particulis vim repulsivam admittunt. Certissimum quidem est, sese repellere minimas quorumdam corporum particulas, quidquid sit vis illa repulsiva. Sed repulsio praecedentem attractionem non excludit, immo ex vi attractiva originem habere repulsionem adfirmant nonnulli, quod deinde fusius explicabimus, ubi sermo erit de corporum clasticitate et de luminis reflexione. Ceterum nos quoque vis repulsivae nomine utemur, effectum dumtaxat, non vero causam aliquam significantes. Etenim quaecumque sit repulsionis causa, vis huius actionem ad calculum revocare et aestimare licet: adeoque quod ad utilitatem tota res perinde se habet. Neque repulsio quidquam obstare potest iis, quae antea demonstravimus, attractionem nempe, ceteris paribus, contactus magnitudini proportionalem esse. Ibi enim sermonem habuimus de corporibus, quorum partes cohaerent, non vero de corporibus elasticis, quorum partes sese fugiunt atque repellunt. Tandem contactus hic a nobis intelligitur, qualis in corporum cohaerentium par-

tibus observatur, neque de contactu physico et immediato quidquam pronuntiare volumus. Certum quidem est, ubi de primis caussis corporumque principiis agitur, multas fieri posse hypotheses, quae validis rationibus difficile refelluntur. Itaque hanc primam nobis esse volumus philosophandi regulam, in causarum universalium investigatione nostram fateri ignorantiam, iudiciumque cohibere.

APPENDIX.

De quibusdam capitis praecedentis utilitatibus.

I.

Adversus impiissimam veterum atomistarum doctrinam invicti roboris argumenta ex praecedenti capite deduci possunt. Materiam aeternam effutiebant atomistae, non tamen aeternum materiae ordinem admittebant. Stultissime delirabant, praesentem materiae dispositionem ex fortuito atomorum sive corpusculorum concursu originem habuisse: eamdem dispositionem casu quoque conservari: contrario tandem casu finem habituram. Hinc patet, veteres atomistas puros putosque atheos fuisse. Quia autem etiam num hodie non desunt nequissimi stultissimique homines, quos haec absurdissima deliria recoquere non pudet; ex praecedentibus demonstrationibus

hos invicte refellere officii nostri partes esse existimamus. Et 1.° quidem sic ratiocinari solent.

Finitus corpusculorum numerus finitum dumtaxat combinationum numerum admittit. At per totam infinitam aeternitatem exstitisse debuerunt combinationes numero infinitae. Quare si in fortuita atomorum agitatione omnia se aequaliter habuerint, ut in longa casuum fortuitorum serie contingit; evidens est, combinationem quamvis determinatam infinities redituram, ac proinde infinities maior est probabilitas, hanc praesentem combinationem redituram, quam non redituram. En absurdissimam atomistarum argumentationem. At in primis in eo turpiter errant, quod putant, esse aliquid re vera fortuitum. Nihil fortuito et puro casu contingere demonstravimus in institutionibus metaphysicis. Sed praeterea huius ratiocinationis absurditatem facile ostendemus. Et quidem falsissimum est, infinito terminorum numero contineri numerum combinationum finitum, si de mundi constitutione sermo habeatur. Finitus quidem est combinationum numerus, si *combinationis nomine* intelligatur tantum ordo quidam, quo alii termini aliis succedunt, et sese mutuo excipiunt. Ita si omnes litterae, quae Virgilii poëma componunt, versentur temere in sacco aliquo, tum extrahantur et ordinentur omnes litterae, aliae post alias, atque

eiusmodi operatio repetatur in infinitum, evidens est, infinities redituram combinationem virgilianam. Verum in mundi constitutione res longe aliter se habet. Etenim planetae circa solem certa lege in determinatis orbitis revolvuntur: spatium, in quo planetae aliique coelestes globi suas periodos absolvunt, in longum, latum et profundum quaquaversum patet. Porro rectae in uno plano sunt infinitae, plana in uno spatio sunt infinita, et pro recta quavis in quovis plano infinita sunt curvarum genera, ac proinde et infinities plures sunt curvae, quae per datum punctorum numerum non transeunt. Praeterea infinitis modis variare potest lex attractionis: pro quavis materiae particula infinitus est dispositionum numerus. Quare pro ipsis materiae particulis haberetur nūmerus combinationum infinitus per ipsum particularum numerum multiplicatus. Itaque in mundi constitutione finitus non est casuum diversorum numerus, sed infinitus, et quidem ordinis altissimi. Inde ergo fit evidens, in immenso isto combinationum numero infinities plures esse combinationes inordinatas, quae exhibeant incertum chaos corpusculorumque temere volitantium massam, quam quae exhibeant mundum ordinatum et certis constantem legibus. Quamobrem nisi sit aliquis, qui ex omnibus aequè per se possibilibus combinationibus unam ex ordinatis eligat, infinities probabilius est,

obventuram combinationum seriem inordinatam, minime vero eam, quam cernimus et admiramur. Atque ad vincendam hanc improbabilitatem infinitam requiritur infinita vis supremi conditoris, qui unicam seriem ordinatam inter alias infinitas seligat atque determinet.

Nec est, quod obiiciatur, etiam hominem, qui statuam aliquam effingit, finita intelligendi vi eligere unicam formam inter infinitas possibiles. Nam statuarius illam unicam formam non eligit, sed modo admodum confuso quamdam determinat figuram, quae unica oritur ex naturae legibus, et ex mundi constitutione, quam naturae opifex infinitus vi infinita determinavit. Per hanc scilicet determinationem ab humanae voluntatis actu oriuntur ceteri motus in brachiis, et ab his motus instrumentorum.

Sed nec dici potest, hunc ipsum ordinem necessarium esse et aeternum, ac per se subsistere ita, ut casus quilibet sequens determinetur a praecedente, et a lege virium interna atque omnino necessaria. ¿ Et quidem quis sibi serio persuadeat, has solas virium leges, quas in praecedenti capite explicavimus, fuisse posibiles et necessarias, ut nimirum corpora sese attrahant tanta potius attractione, et non alia? Nulla sane inter distantiam et attractionis speciem ita necessaria est connexio, ut alia quaevis esse non

potuerit. Praeterea cur haec potius in rerum natura exsistat materiae quantitas, quam alia, nulla sane ratio esse potest, nisi arbitrium entis potentia infinita praediti. Nemo sanae mentis sibi facile persuadebit, in determinata quadam materiae massa haberi necessitatem exsistentiae potius, quam in alia quavis.

Tandem licet materiae talis fingatur natura, ut habeat necessariam sibique essentialem vis inertiae et aliarum virium legem ita, ut status quilibet datus a praecedenti determinari debeat; eadem nihilominus manet contra atomistas demonstrationis vis. Etenim status ille, qui habetur tempore quolibet dato, nec a se ipso nec a materia nec ab ullo ente materiali tunc exsistente suam habet determinationem ad exsistendum, sed determinationem illam accepit a statu praecedenti. Porro status praecedens non potest sequentem determinare, nisi quatenus ipse determinate exsistit, ipse autem nullam quoque in se habet determinationem ad exsistendum, sed illam accepit a praecedente. Quod de secundo praecedente statu diximus, dicendum de tertio, qui determinationem debet accipere a secundo, atque eodem modo progrediendo in infinitum oriretur infinita series statuum, in quorum singulis habemus merum nihil, relate scilicet ad determinatam exsistentiam postremi status. Summa autem nihilorum ut-

cumque numero infinitorum est nihil. Iamdiu enim constitit, merum esse paralogismum, infinitorum nihilorum summam finitae alicui quantitati aequalem esse *.

Ex his ergo evidenter colligitur, ens seriei ipsi extraneum, quod hanc seriem elegit prae seriebus aliis infinitis, infinitam habere determinationem et vim electivam, quae unam illam ex infinitis eligat. Cognitionem habere debuit et sapientiam, ut hanc seriem ordinatam prae inordinatis adhibuerit. Si enim sine cognitione et electione egisset, infinities probabilius foret, ab illo determinatam fuisse aliquam seriem inordinatam, quam unam ex ordinatis; quum nimirum ratio inordinatarum ad ordinatas sit infinita. Igitur ex ipsis quoque atomistarum principiis manifestum fit, infinitam esse probabilitatem pro cognitione, sapientia, ac libera electione, quae quidem probabilitas infinita omnimodam certitudinem inducit; ac proinde atomistas propriis ipsorum armis impugnavimus. Haec autem, quae brevius demonstrata sunt, iungi debent iis, quae in metaphysica de fato et necessitate fuse tractavimus.

II. Ex mirabili minimarum partium stru-

* *Hunc paralogismum sustinuit Guido Grandus, summa cuiusdam seriei infinitae deceptus.* Vid. Wolf. schol. II. ad prob. VII. cap. I. sect. I. part. I. analysis.

ctura, magnitudine, vi attractiva magis ac magis elucescunt divina bonitas illiusque sapientia infinita. Pauca exempla heic considerare et admirari satis erit. Calore solis rarefiunt aquae particulae: e mari ad superiorem aëris regionem sub forma vaporum evehuntur; nec usquam consistunt vapores, donec ad aërem eiusdem gravitatis perveniant, tumque subsidunt, nubesque componunt, et mille figuras induunt. Mox eaedem particulae frigoris vi aliisve causis condensantur, et in minus spatium coactae formam priorem amittunt, et in terram pluviae, nivis, grandinis instar relabuntur. Maxima pluviae pars per fluvios ad mare deducitur, iterum in vapores abitura; pars vero aliqua terrae se immiscet, et ibi deposita arborum herbarumque radices et semina ingreditur, e quibus in alias corporum species adsurgit. Diversa corpora componit eadem pluvialis aqua, prout diversa ingreditur rerum semina; quaedam scilicet transit in plantas, quaedam in gramina, aliqua in flores, aliqua in quercus, ornos, fagos, et alias quamplurimas arborum et plantarum species. ¿Ecquis ergo non admirabitur divinam providentiam, quae sapientia et bonitate infinita ad hominum commoda minimarum particularum structuram composuit atque ordinavit? Sed idem exemplum rursus persequamur. Plantae omnes ex innumeris heterogeneis constant partibus.

Sic in lino e. g. alia est forma radicis, alia caulis, alia tenuium fibrarum, alia florum. Rursus consideremus ipsam vel unius caulis utilitatem miramque varietatem. Caulis membranam separant lini artifices, et postquam mille tractaverunt modis, fibras in oblonga contorquent fila, quae deinde in se convoluta glommorum species referunt. Fila haec varie inter se connectunt, et texunt linteones, et arte sua tellas ex illis componunt, quae vestimenta hominibus praebent. Haec denique annis detrita in linteola redacta aquae immittuntur: malleis igneis in mollem quasi pulpam subiguntur, quae tandem exsiccato humore aqueo in papyrum transmutatur, quae si igni immittatur, partim in tenuissimum pulverem, partim in fumum evanescit. ¡En quantam ex mutato partium situ, ex mutata illorum vi attractiva rerum et effectuum varietatem!

Sed universae naturae pro varia coeli temperie mutationem variamque dispositionem breviter percurramus. Quum terrae partes singulae situum suum respectu solis continuo mutent, eiusdemque radios nunc magis nunc minus obliquos, nunc breviore nunc diuturniore tempore excipiant; universa fere rerum natūra novam faciem per vices induit. Autumno exarescunt segètes, et fructus maturescunt: viridem amoenamque faciem paullatim deponunt campi, et dęcidunt arbori-

bus folia, et mox ingruente hyeme frigent et horrent omnia: nix tegit alta montes, cuius onere depressae laborant sylvae: ipsae maris aquae stabiles et firmae redduntur: quodque prius fuit navibus tantum penetrabile, nunc exercitus et castra gerit. Iterum mutato telluris solisque respectu diffugiunt nives: redeunt gramina campis, et sua arboribus folia: *nec stabulis iam gaudet equus, nec arator igne;* sed nova prorsus et laeta apparet rerum facies, et annus per aestatem ad autumnum revertitur.

Quamvis ex sola minimarum particularum mutatione, figura, magnitudine, vi attractiva oriri certissimum sit infinitam effectuum varietatem; pro ea tamen, quam nobis praescripsimus, philosophica timiditate atque ingenuitate, adserere non audemus, materiam omnem ita homogeneam esse, ut ex diverso dumtaxat minimarum partium situ repetenda sit specifica corporum differentia. Hanc quaestionem deinde revocabimus, variasque philosophorum opiniones expendemus, ubi sermo erit de corporum natura. Interim ingenue fatendum est, nobis innotescere dumtaxat corporum superficiem ipsumque, ut ita dicam, corticem, intimam vero texturam atque naturam nos omnino latere. In hac autem nostra ignorantia iterum elucet divina bonitas, quae humanam superbiam reprimere voluit, eas tantum permittens cognitio-

nes, quae ad vitae necessitates et utilitates conducere possunt.

II. Longius esset referre utilissima experimenta, quae in praesenti argumento sumserunt celeberrimi physici. Vnum adferre satis erit, quod in publicam utilitatem maxime redundare potest. Accuratissimis experimentis compertum est, eam esse salis marini et salis tartari saluberrimam indolem, ut sulphureos vapores aliosque perniciosissimos halitus plurimos potentissime attrahant, atque absorbeant, cuius quidem virtutis in periculosis occasionibus nonnullis utilitas maxima esse potest. Artifices aliqui, ut plumbarii fusores, noxias tractant materias, e quibus perniciosissima erumpunt corpuscula. Si autem hanc adhibeant diligentiam, ut pannum salina aliqua solutione madidum ori naribusque admoveant, vaporum periculum declinare poterunt. Eadem de causa factum est, ut adversus pestiferos halitus tamquam optimum antidotum credi soleat acetum album. Hac salium proprietate admodum salutari ad minuendum saltem praesens periculum uti possent, qui in fodinis aliisque infectis locis non sine vitae discrimine labori manum dare coguntur. Sed de hac re legenda sunt, quae refert clarissimus Hales in eximio opere, cui titulus est: *statica vegetabilium.* Haec pauca dicta sint ad demonstrandam praecedentis capitis utilitatem. Minimarum par-

ticularum vim attractivam ad explicanda artis chemicae phaenomena transferunt magni quidem viri. Verum quamvis haec doctrina nonnullis experimentis feliciter satisfacere videatur; ea tamen abutuntur physici, qui singulas operationes chemicas per attractionis vel repulsionis nomen clare explicasse confidunt. Illi autem merum effectum, nullam vero effectus causam proferunt.

CAPVT III.

De gravitate constanti.

Quamvis in praecedenti capite demonstrata fuerit gravitatis coelestis atque terrestris lex communis, quae nempe decrescat in ratione duplicata distantiarum a centro; observavimus tamen, ita exiguas esse distantias, in quibus experimenta habere licet, si conferantur cum integra telluris semidiametro, ut nulla in gravitate terrestri variatio experimentis vel observationibus conspicua esse possit. Praeterea corpora omnia, quaecumque sit illorum natura, figura, magnitudo, sublata aëris resistentia, ut fit in vacuo boyliano, aequalibus temporibus aequaliter descendunt, ac proinde vis gravitatis aequalibus temporibus aequaliter agit. Itaque gravitatem terrestrem licet re ipsa variabilem, tamquam constantem et uniformem usurpant physici, nosque

hanc gravitatem in praesenti capite considerabimus. Tria autem potissimum expendemus, I.° praecipuas gravitatis adfectiones explicabimus, II.° gravitatis causam investigabimus, III.° tandem centri gravitatis doctrinam exponemus.

ARTICVLVS I.

De gravitatis terrestris adfectionibus praecipuis.

DEFINITIO I.

Gravitatis nomine heic generatim intelligitur : *vis illa , qua corpora ad terram tendunt.* Porro confundi non debet gravitas cum ipso corporum *pondere.* Gravitas enim est vis, quae singulas materiae particulas deorsum urget ; pondus autem est ipsa gravitatis quantitas in unoquoque corpore , seu est ipsa gravitatum summa vel adgregatum. Pondera quantitatibus materiae proportionalia esse , ex ipsa gravitatis natura facile colligitur. Etenim quum vis gravitatis sit constans , et in singulas aequales materiae particulas aequalibus temporibus aequaliter agat, seu aequales ictus imprimat ; erit numerus ictuum , ut particularum aequalium numerus. Praeterea quum corpora omnia per lineas ad sensum parallelas recta descendere observentur ; patet, gravitatis directiones esse parallelas ; ideoque gravitatis

ictus in eamdem directionem conspirant. Igitur gravitas tota erit, ut numerus ictuum, hoc est, ut quantitas materiae; nam quo plures sunt aequales materiae particulae, eo plures erunt ictus. Quare pondera sunt quantitatibus materiae proportionalia. Evidens autem est, hanc demonstrationem valere in quolibet corporum genere, quaecumque sit illorum figura, textura, natura, quum gravitas ex his corporum conditionibus nequaquam pendeat.

Coroll. 1. Ex his áutem facile intelligitur experimentum, quod vix in animum sibi inducere possunt viri rerum physicarum imperiti et sensuum praeiudiciis adsueti. In longioris tubi parte superiori suspenduntur duo pondera, utcumque inaequalia, e. g. gravissimum aurum et levissima pluma. Facto deinde, ut moris est, vacuo ope machinae pneumaticae, corpora illa eodem temporis puncto dimissa, eodem omnino tempore descendunt, et aequalibus temporibus aequalia spatia percurrunt. Experimenti ratio statim patet. Et quidem corpora duo divisa intelligantur in particulas aequales innumeras: vis gravitatis in particulas illas aequales aequalibus temporibus aequaliter agit, ac proinde singulae particulae aequalibus temporibus aequaliter descendunt. Id vero declaratur exemplo hominum eadem velocitate currentium, sive enim coniunctis sive seiunctis manibus currant, eodem tem-

pore ad propositam metam perveniunt. Pari ratione, sive corporum particulae seorsum descendant, sive maius minusve corpus atque adgregatum componant, eodem plane tempore debent descendere. Quod ergo corpora inaequali velocitate per aërem descendant, id tribuendum est aëris resistentiae. Sed huius inaequalitatis causam deinde fusius explicabimus, ubi de medii resistentia sermo erit.

Observ. 1. Gravitatem hactenus consideravimus in eodem terrae loco. Verum quamvis gravitas in eadem regione sit constans, vi tamen centrifuga in remotioribus terrae locis eam plurimum immutari, certissimum est. Quod qua ratione detectum fuerit atque confirmatum, enarrabimus. Superioris saeculi anno *72* Cayennam insulam aequatori proximam profectus est Mons. Richerus ad astronomicas observationes ineundas a regia parisiensi academia missus: secum detulerat horologium, quod Parisiis cum coelestibus motibus accurate conspirabat. Eo adhibito deprehendit multo lentiorem eius motum ita, ut singulis diebus per bina minuta cum dimidio ab integrae diei mensura aberraret. Rem miratus, quam nec ab aliqua machinae mutatione, nec ab alia eiusmodi causa videbat oriri posse; illud coniecit, vim minorem esse versus aequatorem, quam Parisiis. Vnde fieret, ut pendulum lentius vibrationes suas perficeret, et horologium ipsum retardaret. Vt autem

certius constare posset, an res ita se haberet, accuratissime inquisivit in longitudinem penduli, quod singulis minutis secundis horariis singulas oscillationes absolveret, et eius longitudinem aeri incidit, ut eamdem observationem in Galliam regressus iterans, utramque mensuram conferre posset. Constat enim, pari gravitatis vi longiora pendula lentius oscillationes suas peragere, breviora citius: pari longitudine penduli et diversa vi gravitatis ea pendula lentius moveri, quae minori aguntur vi. Si autem bina pendula eodem tempore oscillationes suas peragant, quae iccirco *isochrona* appellantur, inaequalem vero habeant longitudinem; illud, quod longius est, gravitate maiori urgetur. Haec quidem omnia pendent ex pendulorum doctrina, quam deinde explicabimus. Interim vero evidens est, vim illam maiorem esse, qua fit, ut pendulum eodem tempore per maiores arcus excurrat. Nec Richeri spem fefellit eventus. Regressus enim Parisios, ita breviorem penduli isochroni mensuram invenit, ut de inaequalitate gravitatis in diversis terrae locis dubitare omnino non posset.

Rei novitas universam perculit litterariam rempublicam, atque commovit mirum in modum, multis sub initium renuentibus, aliis observationum vitio phaenomenon tribuentibus, aliis vi caloris durissima quaeque metalla dilatantis. Nec defuerunt, qui observa-

tionibus per Europam institutis, gravitatem ubique aequalem se invenisse, adfirmarent, quum nimirum iis methodis, quae tum in usu erant, minus perfectis et perpolitis, exiguum discrimen in tam exiguis locorum intervallis nequaquam deprehendere potuerint. Hinc observationes multo accuratiores in plurimis et admodum dissitis terrae locis fuerunt institutae: hinc academici parisienses regis iussu et liberalitate versus polum borealem et versus aequatorem expeditionem litterariam susceperunt. Atque tandem summo observationum consensu certo definitum habemus, gravitatis vim ab aequatore ad polos augeri perpetuo. Nos quoque heic Romae in hortis regiis coenobii SS. Trinitatis longitudinem penduli ad minuta secunda oscillantis investigavimus. Neque in hac observatione ullam passi sumus desiderari diligentiam. Observatio per plures dies instituta est in loco nullis curruum tremoribus agitato: adhibuimus pendula duo, quorum unum a celeberrimo artifice londinensi Grahamo elaboratum est. Vtebamur etiam mensura bipedali londinensi accuratissima, factaque observationum comparatione, res eadem propriis experimentis innotuit. Verum quod spectat ad huius variationis legem, ad praesentem locum non pertinet. Tota res cum figura telluris aliisque difficilioribus nondum explicatis physicae principiis coniuncta est. Hoc loco ponimus, vim

gravitatis constantem et per rectas parallelas tendentem : quod quidem facere licet, quum in hoc capite gravitatem consideremus in eodem terrae loco, vel in locis a se non multum dissitis. Sed haec doctrina, quam minus accurate nunc considerare satis est, maiori deinde subtilitate et diligentia explicari debet, ubi de pendulis et telluris figura tractabimus.

Neque tamen heic omnino praetermittendum est, quod de huius variationis causa adferri solet. Vi imaginandi nobis effingamus globum aliquem, qui circa suum axem convertatur. Partes illae, quae proximae sunt polis, per quos axis ipse traducitur, eodem tempore peragunt gyros admodum exiguos, qui quidem eo magis crescunt, quo magis a polis receditur, ita, ut omnium maximus is sit, qui ab utroque polo aeque distat, et in eo globi motu *aequator* appellatur. Hinc ibi vis centrifuga omnium maxima esse debet, atque eo gradatim decrescit magis, quo magis acceditur ad polos. Quod quidem demonstratum est, ubi sermonem habuimus de vi centrifuga. Rem igitur ad tellurem transtulerunt, positoque eius diurno motu, considerarunt, vim centrifugam sub aequatore maximam esse debere, prope polos minimam, in polis nullam. Illud praeterea notarunt, vim centrifugam sub aequatore dirigi ad partes centro telluris oppositas, quod ipsius aequatoris

est centrum ; in reliquis autem locis dirigi ad partes oppositas illi axis puncto, quod est circuli descripti centrum, quod quidem centrum eo remotius est a centro terrae, quo magis circulus ille ab aequatore recedit. Ac proinde quum vis gravitatis ubique dirigatur versus terrae medium, observarunt, ipsam vim centrifugam sub aequatore magis etiam directe gravitati opponi, quam versus polos.

Corol. 1. Ex dictis patet, duplicem considerari posse gravitatem, unam scilicet, quam *primitivam* vocant, nulla vi centrifuga turbatam, haecque gravitas sub polis dumtaxat habetur. Altera autem est gravitas *variabilis* vel *actualis* pro varia scilicet a polis distantia. Neque huic gravitatis variationi obstat, quod nullam in corporum pondere inaequalitatem deprehendere liceat: eiusdem corporis idem pondus tum heic Romae, tum in America per bilances experimur. Etenim pondus examinandum comparamus cum alio pondere, quod in Americam translatum aeque mutatur ita, ut eadem maneat ponderum relatio, ac proinde corpus, quod heic inventum est librae unius, debet et in America unius librae pondus demonstrare. Re quidem vera si possemus perfecte nosse vim, quam nos heic in sustinendo pondere exercemus, et eiusdem vis meminisse, ubi pondus in remotam regionem transfertur; liceret ex ea vi aestimare auctam vel imminutam gravitatis

vim. At nostri conatus nobis omnino ignoti sunt: vix crassiorem quamdam comparationem sensationum ope instituimus: subtiliora discrimina nequaquam percipimus, atque etiam ipsae vires nostrae mutantur in horas.

Observ. II. Gravia esse corpora omnia, iam apud cultiores philosophos compertum est. Et quidem pondus demonstrant corpora omnia, in quibus experimenta sumere licet, ne his quidem demtis corporibus, quae a vulgo imperito levissima creduntur. Ita fumus, qui in aëre sursum adscendit, facto vacuo boyliano, deorsum relabitur, proprio scilicet pondere. Quod ergo fumus per aërem sursum evehatur, id tribuendum est maiori aëris gravitati, qua fit, ut aër maiori conatu tendat deorsum, ac proinde fumum propellat sursum. Itaque nulla est vera corporum levitas, sed *relativa* dumtaxat et *apparens*.

Defin. I. Quare distinguenda est gravitas in *absolutam* et *relativam*. Gravitas absoluta est tota vis illa, qua corpora tendunt deorsum. Gravitas autem specifica est ratio gravitatis absolutae corporis unius ad gravitatem absolutam corporis alterius sub eodem volumine, sive quod idem est, gravitas specifica est ratio ponderis corporis unius ad pondus corporis alterius, eodem manente volumine. *Volumen* vel etiam *moles* dicitur totum spatium extima corporis superficie comprehen-

sum, sive includat spatiola vacua sive heterogeneas etiam particulas. Ex idea massae et voluminis oritur idea *densitatis*. Densitas eo maior dicitur, quo maior est corporis massa seu quantitas materiae sub eodem volumine. Si vero eadem maneat quantitas materiae, mutetur autem volumen, quo minus est volumen, eo maior dicitur densitas; ac proinde densitas est, ut massa directe et volumen inverse.

Coroll. 1. Quare si massa dicatur M, volumen V, densitas D; erit $D = \frac{M}{V}$, ac proinde etiam $M = DV$ *. Quia vero gravitas specifica est ratio quantitatis materiae seu ponderis ad volumen, eodem manente volumine, evidens est, gravitates specificas esse ut densitates. Contraria ratione eo rarius dici solet corpus, quo minorem sub eodem volumine continet materiae quantitatem, ac proinde raritas est in ratione inversa densitatis. Igitur ad corporum raritatem facile transferuntur praecedentes formulae. Iam vero quamvis ob minorem specificam gravitatem nullum pondus aliquando ostendere videantur corpora; probe tamen meminisse oportet, levita-

* *Heic notandum est, non adstrui aequalitatem, sed proportionem dumtaxat, uti* §. 11. art. 1. cap. 1. part. 1. sect. 1.

tem illam relativam esse dumtaxat. Sed haec omnia in meliori lumine collocabimus, ubi fluidorum doctrinam exponemus. Ceterum quamvis dicamus, corporum gravitatem experimentis compertam esse, id tamen dictum nolumus de subtilissimis quibusdam corporibus; igne, e. g. et flamma. Horum enim corporum tantillum est pondus, ut nulla experimentorum subtilitate innotescere potuerit, quidquid adfirment philosophi quidam suis experimentis plus aequo confici. Sed totam rem deinde ad trutinam revocabimus, ubi ignis proprietates considerabimus.

ARTICVLVS II.

De causa gravitatis.

I.

Mirantur imperiti homines, a philosophis tanto studio quaesitum esse, cur gravia descendant, hancque statim in promtu rationem adesse respondent, quod nempe non sustineantur. Verum quod ita facile et obvium creditur, ut imperitorum hominum mos est, summos viros in varias traxit sententias, et adhuc sub iudice lis est. De gravitatis causa quattuor circumferuntur philosophorum opiniones. Peripatetici existimant, gravitatem esse vim quamdam vel qualitatem realem corporibus omnibus internam a Deo ipsis im-

pressam ita, ut quemadmodum corpora per extensionem locum occupant, per impenetrabilitatem sese mutuo ab eodem loco excludunt; sic quoque per gravitatem ad locum infimum sive telluris centrum ferantur. Newtoniani, gravitatem omnibus omnino corporibus inditam ac impressam esse, constituunt ita, ut non modo ignis et aër, quos peripatetici leves existimant, sed ipsa quoque tenuissima aetheris substantia, quae gravitatis expers a cartesianis effingitur, gravitatem aliquam habere debeat, ac nulla proinde levitas positiva in rerum natura reperiatur. Atque ista quidem evidenter adeo nitideque experimentis demonstrantur, ut dubitari non possit, gravitatem hanc, vel, ut vocant newtoniani, vim centripetam corporibus omnibus inesse. At undenam centripeta vis illa singulis corporibus imprimatur, id nobis hactenus occultum atque inexploratum esse, Newtonus ingenue fatetur, variasque causas enumerat, ex quibus eadem vis centripeta velut origine pendere possit. At Newtonus non *physice* gravitatis originem scrutatur, sed *mathematice* tantum gravitatis effectus, leges atque phaenomena exponere adgreditur. Itaque a definienda gravitatis origine prudenter abstinuit, et quamvis illam ab attractione oriri dixerit; in variis tamen locis profitetur, si physice res exploretur, ab impulsione originem habere posse. At eximiam sapientissimi viri mo-

destiam haud semper aemulati sunt, qui Newtoni doctrinam exponunt. Etenim attractionem ipsam velut physicam exploratamque gravitatis causam ita ingerunt, ut eam in dubium vocari minime patiantur. Neque tamen putandum est, philosophos illos occultas peripateticorum qualitates obtrudere voluisse. Peripatetici attractionem considerabant, velut *entitatem* aut *qualitatem* certis quibusdam corporibus inhaerentem, quas quidem qualitates ex specificis corporum formis oriri aiebant; formae autem nomine in veteri philosophia nihil obscurius esse potest. Porro nullam talem *entitatulam* aut *qualitatem* fingunt recentiores newtoniani, sed attractionem admittunt, velut universalem naturae legem a supremo rerum omnium auctore constitutam, vel etiam ut corporum omnium proprietatem habent: quae quidem opinio ab scholasticorum qualitatibus longe differt. Gassendus existimat, particulas, atomos, sive corpuscula plurima quaquaversum velut radios e terrae gremio diffundi, quae corpuscula quum fere uncinata et hamata intelligi possint, ubi in corpus aliquod incurrunt, illi maxime adhaerent. Hinc fit, ut terrestres particulae cum corporis eiusdem particulis arctissime devinciantur, illudque secum in terram abripiant eo prorsus modo, quo tenuissimae quaedam particulae ex magnetis substantia prodeuntes, ubi ad ferrum pervenerint, illisque fuerint implici-

tae, ferrum ipsum ad magnetem regerunt. Vix refelli merentur hac in re peripateticorum et gassendistarum figmenta. Quid sint qualitates occultae, neque explicant illarum defensores, neque ipsi videntur intelligere. Recentioris philosophiae lumine iam dissipatae sunt illae qualitatum occultarum tenebrae. Neque firmiori fundamento innituntur uncinata atque occulta gassendistarum corpuscula. Nihil enim admitti iubet cultior physica, nisi quod experimenta atque observationes certo exsistere demonstrant. Deinde ¿ quam causam adsignare poterunt gassendistae, cur uncinata illa corpuscula e tellure exeant, ad diversas altitudines rapiantur, et tandem relabantur? Talia certe commenta difficultatem non explicant, immo non parum augent. Quid sentiendum sit de newtonianorum sententia, ex huius articuli progressu manifestum fiet.

Vltima tandem superest cartesianorum hypothesis magno doctrinae apparatu munita. Materiam quamdam subtilissimam comminiscuntur cartesiani: hanc ponunt circa terram vorticis motu agitari, ipsamque terram circa axem revolvere: quo fit, ut eadem materia vim centrifugam adquirat, et corpora terrestria versus terram propellat, nempe secundum directionem vis centrifugae directioni contrariam. Id autem illustrant exemplo fluidorum, quae corpora sibi demersa, si minorem habeant gravitatem specificam, sursum

evehunt. Ita etiam vorticis materia corpora, quae non tanta pollent vi centrifuga, deorsum trudere debet. His explicatis sit

CONCLVSIO.

A VORTICE CARTESIANO REPETI NON POTEST GRAVITATIS CAVSA, NEQVE AB VLLO IMPELLENTE FLVIDO, QVOD EASDEM CVM FLVIDIS COGNITIS PROPRIETATES HABEAT.

Probatur prima pars. 1.° Ex hac hypothesi inferretur, vim centrifugam vorticis ipsa vi centrifuga corporis multo maiorem esse, vel materiam subtilem ipso corpore esse multo densiorem. Etenim gravitas corporis fluido cartesiano immersi aequalis foret virium centrifugarum vorticis et corporis differentiae per suas respective massas multiplicatae. Si nempe gravitas corporis immersi dicatur G, vis centrifuga materiae subtilis, cuius locum illud occupat, dicatur V, eius massa M, vis centrifuga corporis U, huius massa m, erit $G = V \times M - U \times m$. Evidens enim est, virium illarum differentia corpus pellendum esse; ac proinde $V \times M$ maior esse debet $U \times M$: ideoque vel V maior est quam U, vel M maior quam m; sed utrumque repugnat. Primum quidem; etenim vis centrifuga corporis ex rotationis velocitate cir-

ca terram oritur: haec autem velocitas telluris velocitati proxime aequalis est. Itaque in primo casu multo maiorem fore oporteret vorticis velocitatem ipsa velocitate telluris: hinc secundum rotationis terrestris directionem, ab occidente scilicet ad orientem, perpetuus, isque vehementissimus sentiretur ventus. Neque minus repugnat casus alter; maiorem scilicet esse vorticis quam materiae terrestris densitatem. Huius enim densissimae materiae resistentiam aliquam experiremur, tum a summo deorsum, tum ab imo sursum. At experimentis compertum est, totam, quam experimur resistentiam, aëri tribuendam esse, eamque nullam esse in vacuo boyliano, in quo corpora omnia aequali velocitate descendunt. Absurdissimum ergo est fingere tantam in materia vorticis densitatem. Quod quidem ultro largiuntur cartesiani. Quare in primo casu paullo diutius immorabimur, variasque considerabimus velocitatis hypotheses.

Ponamus vorticis circumterrestris velocitatem eamdem esse quam proxime cum velocitate telluris. Iam ob datam diurnam telluris rotationem 24 horarum spatio, dabitur quoque ipsa vorticis velocitas. Praeterea ex observationibus geographicis nota est semidiameter terrestris, ac proinde et ipsa maximi terrestris circuli peripheria. Datur ergo vorticis circumferentia. His autem datis, meminisse oportet, vim centrifugam corporis in

circulo revolventis tempore minuti unius secundi esse, ut quadratum arcus eodem tempore descripti per diametrum divisi. Ille autem arcus facile invenitur per notissimam regulam trium, si dicatur: tempus totum viginti quattuor horarum est ad integram vorticis sive maximi terrestris circuli circumferentiam, ut tempus minuti unius secundi ad arcum eodem tempore percursum. Huius arcus quadratum dividatur per vorticis sive telluris diametrum, habebitur vis centrifuga, illa scilicet lineola perpendicularis, quae continetur inter tangentem et arcum minuti unius secundi tempore descriptum; tali scilicet vi centrifuga corpus aliquod per lineolam praedictam minuti unius secundi tempore descenderet. Si ex his principiis calculus ineatur, invenietur spatium tempore minuti unius secundi a corpore vi centrifuga vorticis agitato percurrendum non excedere pedem dimidium. Igitur gravia vi centrifuga vorticis cartesiani prope terram tempore minuti unius secundi non ultra dimidium pedem descenderent; ut hoc ipso tempore pedes quindecim percurrunt, ut notum est experimentis; ergo gravitatis phaenomenis non satisfaceret cartesiana hypothesis.

Vt huius demonstrationis vim effugiant cartesiani, fingunt, vorticis celeritatem telluris vertigine esse multo maiorem. Et re quidem ipsa velocitatis decies septies maioris hy-

pothesi facta, initoque, ut iam exposuimus, calculo, prodit lineola, quae vim centrifugam exhibet pedum quindecim; ut postulant gravitatis phaenomena. Verum explicandis deinde motuum legibus repugnat haec maior velocitas. Vortex enim velocior in ipsam terram transferret aliquam velocitatis suae partem, donec tellus et vortex communi velocitate moverentur. Hanc tamen concedamus hypothesim, et quid ex ea inferatur, expendamus. Quicumque animo paullulum attento rem perpenderit, facile adsentietur, effici non posse, ut materia subtilis ipsaque tellus tanta ferantur velocitatum differentia, nisi prominentia quaeque corpora in telluris superficie, veluti arbores, aedes, turres abripiantur atque subvertantur. ¿Quis, quaeso, hominum erectus stare super terra vel ad punctum temporis posset, capite decies septies velocius pedibus versus orientalem plagam translato?

Praeterea experientia quotidiana compertum est, gravia in sublime iacta deorsum recta tendere, idemque soli terreni punctum, cui ad perpendiculum proiecta respondent, relapsa attingere; at in praedicta hypothesi longe aliter se haberent experimenta. Corpus omne, quo altius in atmosphaera translatum foret, eo longius in ortum recideret, et a perpendiculo longissime aberraret. At nulla in quolibet corporum terrestrium statu de-

prehenditur experimentorum differentia, omnia perinde se habent, ac si terra, quam inhabitamus, plane quiesceret. Nec aliquis dicat, subtilissimum aetherem, dum ob occasu in ortum gyrat, corporum crassiorum poros rotationi suae obvios pervadere, sicque perpendiculari eorum casui non obsistere. ¿Quonam enim modo corpora versus communis vorticis centrum materia illa depelleret? ¿Cur eorumdem gravium poros secundum vis centrifugae directionem patefactos nihil eidem materiae intercludat? His demonstratis, iam concludere licet: reiici omnino debet hypothesis illa, quae certissimis repugnat gravitatis phaenomenis; atqui hypothesis de vortice cartesiano gravitatis phaenomenis repugnat; ergo talis hypothesis omnino reiicienda est.

11.° In hypothesi cartesiana per circulos aequatori parallelos defertur vorticis materia, ac proinde vires centrifugas secundum lineas in horum circulorum planis semper iacentes agere oporteret. Descenderent ergo corpora omnia in eorumdem circulorum planis, et perpendiculariter ad axem non ad ipsam telluris superficiem tenderent; quod quidem falsum esse demonstrant experimenta. In circulis enim aequatori parallelis per lineas ad horizontem obliquas gravia descenderent, quod est contra experientiam. Hanc demonstrationem experimento ita repraesentare solent physici. Sphae-

ra vitrea aquam ex parte contineat : aquae innatent corpuscula plurima: machina hoc modo comparata circa axem velocissime convertatur. Id vero observare licebit, corpuscula non centrum petere, sed disponi secundum axis longitudinem. Experimentum illud cartesianam hypothesim satis apte repraesentare videtur. Sphaera circumacta ipsam telluris vertiginem exhibet; corpuscula autem aquae immersa vires gerunt corporum terrestrium, quae vorticis materia innatant in praedicta hypothesi. Idem proinde facere deberent corpora terrestria, quod in corpusculis illis observamus; nempe ad axem telluris tenderent. Itaque tum ratiocinatione tum experientia facile refellitur cartesiana vorticum hypothesis.

Probatur secunda pars. Si gravia fluidae materiae vi deorsum quovis modo pellantur, vis, qua descendunt corpora, erit, ut numerus particularum fluidarum, quibus simul agentibus versus terram truduntur; sed numerus eiusmodi particularum est ut corporis superficies, quod est evidens. Quare vis, qua corpus deorsum premitur, erit ut eiusdem superficies, non ut ipsius quantitas materiae. Quod quidem experientiae repugnare, iam antea demonstravimus. Et quidem in hac hypothesi corpora quaelibet sub eodem volumine eamdem haberent gravitatem specificam ob aequalem fluidi actionem: ita aequale pondus ha-

berent pes cubicus auri et pes cubicus suberis. Praeterea ob eamdem rationem, seclusa aëris resistentia, descendentium corporum velocitas sub eodem volumine foret in ratione reciproca massarum. Si enim eadem vis maneat, velocitates se habent in ratione inversa quantitatum materiae, ut iam demonstratum est (§. *11. art. 1. cap. 1. part. 1. sect. 1.*). At contrarium observatur, quum corpora omnia aequali velocitate in vacuo boyliano descendunt; ac proinde gravitas agit in ratione massae, non autem voluminis. Haec demonstratio quamlibet fluidi prementis hypothesim evertit, nisi reponant cartesiani, quod quidem faciunt recentiores huius hypotheseos reformatores, fluidum illud, quod gravitatis causa est, a nostris fluidis longe diversissimum esse, alias proprietates habere, et secundum alias plane leges agere. Sed ita philosophari nugari omnino est. Tali enim philosophandi modo iam ineptissima quaeque hypotheseon commenta in philosophiam invehere licet, et de universa physica actum est. In hac conclusione de gravitate terrestri dumtaxat sermonem habemus. Quae enim ad gravitatem coelestem pertinent, explicato systemate planetario convenientius tractabuntur. Proprio etiam loco disseremus de causa attractionis, quae inter minimas viget corporum particulas, ubi phaenomena ad hanc aliam attractionis speciem referenda exponemus.

Fig.

SOLVVNTVR OBIECTIONES.

Obiect. 1. contra primam partem. Gravia ad telluris centrum, non ad axem tendere, ex cartesiana hypothesi intelligitur; nec contrarium probat adlata inter probationes demonstratio. Re quidem vera si fingatur particula materiae revolvens in circulo, cuius
8. radius *GB*, huius materiae vis centrifuga secundum radium *GB* dirigitur. Accurate quidem se habet demonstratio, si circulus solitarie spectatur. At si circulus ipsaque revolvens materia in vortice sphaerico, cuius partes sint, considerentur; iam radius *GB*, ideoque et vis centrifuga in puncto *B* obliqua se habet respectu tangentis *BR*. Quare directio obliqua *BG* resolvi debet in *BC*, quae transit per centrum, et ad tangentem *BR* perpendicularis est. Haec vis centrifugae resolutio patet ex demonstratis de viribus compositione et resolutione. Igitur vi centrifuga vorticis non pellentur gravia versus *G* sed versus vorticis centrum *C*. His demonstratis sic argumentari licet, gravissima omnium difficultas, quae obiici solet, haec est, quod nempe gravia ad centrum telluris non tenderent, atqui huic obiectioni satisfactum est; ergo nulla apparet ratio genuina; cur hypothesis de vortice cartesiano reiici debeat.

Resp. transeat maior, et N. min. Mirum

sane est, quod accuratissimae demonstrationis vim tali responsione eludere tentaverint scriptores aliqui rerum physicarum non omnino imperiti. Et quidem si virium resolutionem instituere velimus, vis centrifuga *GB* non in solam vim per *CB* resolvitur, sed simul in vim tangentialem per *BR*. His autem duabus viribus coniunctis per *BC*, *BR*, corpus describet diagonalem *BC*. Propositam obiectionem absurdam omnino esse, experientia confirmat. Si enim vas *MAD* liquore plenum corpus aliquod in *B* minus grave specifice contineat, corpus illud verticaliter adscendet per *BG*, non autem per *BC*, quod tamen fieri oporteret, si valeret obiectio.

Inst. *1.* Fingi potest vortex duplici motu simul agitatus circa axes duos, quam quidem hypothesim factam legimus a clarissimo Bulfingero in dissertatione de causa gravitatis, quae ab academia regia parisiensi anno 1728 praemio condecorata fuit. Hac posita vorticis duplici vertigine, iam fieri, ait vir praelaudatus, ut fluidi particulae circulos maximos singulae describant. Itaque vis centrifugae directio in quolibet puncto iacebit in circuli maximi plano, ac proinde vi centrifuga corpus pelletur ad commune circulorum maximorum centrum, hoc est, ad centrum vorticis.

Resp. N. ant. Fictitia omnino est et male compacta Bulfingeri hypothesis. Vix in

praedictam dissertationem oculos conieceram, quum statim cognovi, curvam hoc duplici motu describendam ad illud pertinere curvarum sublimiorum genus, quas duplicis curvaturae appellant geometrae. Idem problema litteris communicavi cum clarissimo viro Petro Martinio Neapoli astronomiae professore; nonnullaque ad hanc rem spectantia demonstravi. Tandem vero inveneram quaesitae curvae figuram, ut numeri arithmetici 8 notam referat. Proposuerat Bulfingerus machinam quamdam, cuius ope ad experientiam problema posset revocari, sed hanc nondum perfectam adfirmat, quum tempus instaret transmittendae Parisios dissertationis, quam transmisit experimento nondum facto. Porro machina, quae ad duorum eiusmodi vorticum declarandam actionem Bulfingerus excogitavit, non aliud indicat, quam quod gravia non ad centrum, sed ad ipsum axem intra binarum revolutionum axes medium propellantur. Curavi talem machinam exsecutioni mandari, saepiusque experimento instituto attentis oculis, eam curvam observavi, quam geometria mihi iam certo demonstraverat.

Obiect. 2. contra secundam partem. Exstant Newtoni litterae ad Boylium datae, in quibus aetheris cuiusdam subtilissimi hypothesim hunc in modum constituit. Ponit Newtonus, aetherem formari ex particulis per gradus indefinitos mole diversissimis: fingit de-

inde, in corporum poris minus aetheris crassioris latere, quam in spatiis liberis; ideoque in telluris globo multo minorem contineri aetheris crassioris quantitatem, quam in aëris regione. Ponit deinde, aetherem crassiorem in aëre ad regionem telluris superiorem tendere, subtiliorem vero aetherem in terram tendere ad partes aëris. Inferiores ita, ut a parte superiori atmosphaerae usque ad telluris superficiem, et a telluris superficie usque ad centrum aether per gradus perpetuo fiat subtilior. Fingamus iam, corpus aliquod in aëre suspensum aut in ipsa telluris superficie positum; aetheris particulae in superioribus corporis partibus crassiores sunt particulis aetheris, quae in inferioribus corporis partibus continentur (*ex hypothesi*). Praeterea aether crassior quum sit poris minus accommodatus, quam aether inferior atque subtilior, descendere debet aether crassior, et locum subtiliori aetheri inferiori cedere; id vero fieri non potest, nisi corpus spatium ab aethere relictum occupet, ideoque descendet. Haec est hypothesis newtoniana, quam fere de verbo ad verbum ex praedicta epistola latine reddidimus. Eamdem hypothesim plurimis aliis in locis indicavit Newtonus. Tandem aliae fingi possent hypotheses. ? Quid enim vetat, quominus aliud quoddam invehamus fluidum, quod diversissimas a fluidis cognitis proprietates habeat: secundum alias omnino leges a-

gat: quod nullam aut fere nullam resistentiam praebeat, quod vi inertiae, vi gravitatis careat; sit tamen gravitatis causa? Vnde sic concludendum: admitti possunt hypotheses philosophicae, quarum falsitas demonstrari non potest; atqui huius hypothesis de aethere newtoniano falsitas demonstrari nequit: ergo admitti facile potest, ut gravitatis causa adsignetur.

Resp. N. mai. Tamquam vanissimam repudiamus illam philosophiam, quae meris innititur coniecturis, atque hypotheses communibus naturae legibus contrarias longe reiicimus. In memoriam revocentur, quae de philosophandi regulis et hypotheseon usu praescripsimus. Descripta hypothesis non satis digna videtur celeberrimo auctore suo, qui tantam in philosophando severitatem atque diligentiam adhibuit. Et certe nullam gravitatis rationem reddit haec hypothesis. Huic enim commentitio aetheri tribuit gravitatem, cuius proinde alias superest adserenda causa. Igitur non sine fundamento credunt newtoniani, magistrum suum in proponenda hac hypothesi usum fuisse quadam *philosophica* prudentia, et receptis vulgaribus philosophorum opinionibus parcere voluisse. Tandem philosophicam Newtoni modestiam nos imitati nequaquam pronuntiamus, nullam esse externam, et ab aliquo fluido oriundam gravitatis causam. Id unum adfirmamus, ex vorti-

cibus cartesianis eam repetendam non esse, neque ex ullo fluido, quod easdem cum fluidis cognitis proprietates habeat. Et quidem si fluidum illud grave sit, iterum de causa gravitatis redit quaestio. Si idem fluidum agat in corporum superficiem vel in interiores corporum particulas; secundum vulgares fluidorum leges corporibus imprimere non potest talem motus quantitatem, quae sit accurate, ut quantitas materiae. Tandem fluidum illud ita subtile foret, ut corporum etiam durissimorum substantiam penetraret, neque corporum motibus resistentiam praeberet; vi tamen maxima in se mutuo corpora impelleret. Hae quidem proprietates communibus fluidorum proprietatibus omnino repugnat, easque nobis ignotas esse, fatemur. Quae quum ita sint, facile concedimus, gravitatem esse *qualitatem occultam*, dummodo hoc nomine nihil aliud intelligatur, nisi ignota effectus alicuius causa. Valde autem probabile est, Aristotelem nullam aliam huic vocabulo tribuisse significationem, eamque ab illius sectatoribus fuisse corruptam, et pro arbitrio varie explicatam vel potius obscuratam.

ARTICVLVS III.

De centro gravitatis.

Quum ab ipsa gravitate ortum habuerint

Fig. centri gravitatis doctrina et nomen ; rerum ordo postulat, ut argumentum illud heic data occasione pertractemus.

Defin. 1. Centrum gravitatis est punctum, ex quo corpus utcumque suspensum manet in aequilibrio, nulla parte praeponderante. Quare si centri gravitatis motus omnia impediatur, immotas manere necessum est omnes corporis partes, ac proinde totum corporis pondus in ipso gravitatis centro collectum fingi potest, et loco ponderis ipsum gravitatis centrum substituere licet. Itaque patet, centrum gravitatis hoc modo definitum idem esse cum *centro aequilibrii.* Quare utrumque vocabulum indiscriminatim usurpabimus. Non solum in corpore unico, sed in quolibet corporum numero seu, ut vocant, systemate considerari potest centrum gravitatis.

9. Si virgam rigidam *AA* atque inflexibilem fingamus omni pondere et inertia destitutam, ipsaque suspendatur e puncto medio *C*, et ad aequales hinc inde a medio suspensionis puncto distantias *CA*, *CA* adnectantur bini globi aequalis ponderis *R*, *P* ; ipsi in aequilibrio manet, et neuter alterum vincere potest. Quod evidens est, quum omnia hinc et inde sint paria, nullaque proinde sit ratio, cur unum alteri praevaleat. Si ex altera parte addatur pondus quantumvis exiguum *h*, tolletur, aequilibrium, et pars illa globi *r* descendet, adscendente altera globi *p*. Si distantia a pun-

cto suspensionis non sit eadem, bina corpora Fig.
aequalia non manent in aequilibrio. Immo fieri poterit, ut id quod gravius est, sed puncto suspensionis propius, cogatur adscendere. Atque haec est regula generalis aequilibrii:

Lex aequilibrii. Habetur nimirum aequilibrium, si distantiae a puncto suspensionis sint ponderibus appensis reciproce proportionales ita, ut tanto minor sit distantia, quanto pondus maius est.

Lex ista facili ratiocinatione ita intelligi potest. Si quaedam vis requiritur ad movendum corpus aliquod *A* per datum spatium *Aa* da- 10.
to tempore; evidens est, requiri vim duplam ad movendum idem corpus per spatium duplum eodem dato tempore: item requiritur vis tripla ad movendum idem corpus per spatium triplum, et ita deinceps. Quare et illud manifestum est: si nempe quaedam vis potest vim aliam contra propriam illius directionem agere per datum aliquod spatium dato tempore in corpore *B*; ad eamdem vim ita agendam per duplum, triplum, dimidium spatium, requiritur vis dupla, tripla, dimidia. Iam vero in virga praedicta si ponendum sit ex parte alterutra pondus, quod aliud ex parte altera constitutum in eadem distantia sublevare debeat, ipso nonnulli maius esse oportet, ut ostendimus. Si autem corpus *B* attollendum sit in dupla distantia, attollendum erit per duplum circuli arcum *Bb*.

Illa enim pondera circa punctum suspensionis similes describunt circulorum arcus *Aa*, *Bb*, qui proinde sunt ut radii, sive ut distantiae a centro motus. Quare requiritur dupla vis, ac proinde si pondus *B* eo sit minus, quo distantia *CB* maior est in eadem ratione, neutra pars vincere potest, sed pondera in aequilibrio manere necessum est. Hoc ergo est principium aequilibrii: distantiae scilicet a centro motus *AC*, *CB* sunt in ratione reciproca ponderum *A* et *B*, sive massarum. Sunt enim pondera massis proportionalia. Fingi autem possent infinitae gravitatis hypotheses, in quibus pondera non forent massis proportionalia; tumque *centrum massae*, per quod nempe producto utcumque plano corpus divideretur in massas aequales, idem non foret cum centro gravitatis. Verum tales hypotheses geometris considerandas relinquimus. Physicis gravitatem constantem, qualem in machinarum viribus aliisque experimentis sese manifestat, contemplari satis sit.

Defin. 11. Praecedens doctrina ad machinarum quarumlibet vires aestimandas maxime valet. In quavis machina binae utcumque vires inter se ponuntur connexae, quarum quidem unam appellare solent *potentiam*, alteram vero *resistentiam*. Vbi autem vires quaecumque ad machinam transferuntur, non solum attendi debet ipsa potentia *absoluta*, sine ullo scilicet machinae adiumento, sed et-

iam velocitas, qua moveri inciperent vires Fig.
secundum propriam directionem, si vincerent, vel contra directionem propriam, si vincerentur. Iam vero in casu aequilibrii, vires sunt in ratione reciproca distantiarum á centro motus, vel quod idem est, reciproce ut spatia eodem minimo tempore percurrenda, aut etiam ut velocitates *initiales* reciproce. Quare 10.
si vires absolute oppositae massarum A et B multiplicentur per suas a centro motus distantias AC et CB vel per spatia iisdem temporibus describenda Aa, Bb, erunt producta illa hinc et inde aequalia in casu aequilibrii. Productum ex potentia in distantiam a centro motus vocatur *momentum potentiae*; productum vero ex resistentia in suam a centro motus distantiam dicitur *momentum resistentiae*. Heic vero recordari oportet saepius inculcatam virium definitionem. Nempe virium nomine nihil aliud intelligimus, nisi motum quemdam dato tempore genitum, ac proinde aequilibrii nomine nihil aliud intelligi volumus, nisi motum aequalem eodem tempore in partes contrarias producendum. Vnde patet, aequilibrii notionem et demonstrationem nulli ambiguitati aut exceptioni obnoxiam esse posse. Eamdem vero demonstrationem manere evidens est, si vires quotlibet ad machinam adhibeantur. Collectis nempe virium omnium momentis, si summa omnium, quae machinam in unam partem ni-

Fig. tuntur convertere, inveniatur aequalis momentorum summae in partem oppositam, habebitur aequilibrium. Si autem altera summa sit maior, haec vincet, machinamque movebit. Sed haec omnia simpliciorum machinarum exemplis illustrabimus.

11. *Prop.* I. In statera, quae *romana* dicitur pondus mobile *P* excurrit per virgam ferream *AB* in partes aequales divisam, adscriptis numeris, qui libras librarumque partes designant. Quo magis pondus removetur a puncto suspensionis *C*, quod *hypomoclium* dicunt, eo maius pondus ex adversa parte *D* in constanti quadam distantia suspensum re-
12. quiritur ad servandum aequilibrium. In statera *vulgari* seu *libra AB* aequales sunt a puncto suspensionis *C* distantiae *AC*, *CB*. Evidens autem est, utriusque staterae ope aestimari posse corporum pondera.

13. *Prop.* II. In *vecte* generaliter, sive fulcrum immobile *C*, cui vectis innititur, sit inter vim *P* et resistentiam *D*, quae diri-
14. gantur ad partes oppositas; sive fulcrum *C* iaceat ultra vim *BP* et resistentiam *D*, quae in eadem directione agant; quo remotior erit vis *P* ab ipso fulcro *C*, eo maius erit eius momentum, ideoque quo magis removemus manum a fulcro, eo facilius pondus sublevamus.

15. *Prop.* III. In *cuneis* augetur momentum, si longiores sint et tenuiores, nimirum si

minor sit angulus *CAD*, qui corpus frangendum vel dividendum *XZ* penetret. Nam si minor est angulus, eo maius erit spatium *EA*, quo cuneus promovetur a vi ipsum impellente *P*, relate ad spatium *CD*, quo a se invicem discedunt partes *laterales*, quae cunei progressum impedire nituntur. Quoniam autem angulus, quem efficiunt binae lineae curvae, ubi se contingunt, est in immensum minor, quam angulus, quem efficit recta cum alia recta, ut constat ex ipsis geometriae elementis (*adnot. ad schol. theor. III. cap. II. sect. I. geom.*), iccirco ungues et rostra incurvata, et multo magis novaculae utrimque introrsum excavatae tam facile penetrant. Fig.

Prop. IV. In *cochlea*, dum manus *D* ingentem peragit gyrum, axis *IV* per unicam spiram *SA* promovetur. Hinc momentum eo maius est, quo spira *SA* tenuior, et circulus, quem manus peragit amplior, seu quo longior axis *DI*. 16.

Prop. V. In machina, quam dicunt *axem in peritrochio*, vectibus oblongis horizontaliter infixis cylindrus *DE* convertitur, cui interea dum advolvitur funis *D P*, ponderi *P* trahendo vel attollendo adnexus, pondus promovetur in singulis revolutionibus, quanta est cylindri *DE* circumferentia; vis autem *M* vectibus illis applicata movetur per totam circuli *AB* circumferentiam, cuius radius est ipsa vectis longitudo. 17.

Fig. *Prop. VI.* Alteram tandem subiungimus
18. machinam, *trochleas* scilicet, quae si fixae fuerint, vim non augent; at si ita fuerint
19. coniunctae, ut aliae CB sint immobiles, mobiles aliae EDA, iam vis in immensum augeri potest. Dum enim manus V removetur a proxima trochlea B, tantum ipsa movetur, quantum funis VK educitur, et tantumdem contrahitur summa funium omnium a trochlea ad trochleam aliam tendentium, ideoque singula funium intervalla, quae tot sunt, quot trochleae, eo minus contrahuntur, quo maior est trochlearum numerus, et eo minus trochleae mobiles ad immotas accedunt; ideoque pondus eo minore spatio promovetur.

Schol. I. Nunc vero breviter explicandum, quid valeant machinae, seu quanta utilitate adhiberi possint. Demonstratum est, in casu aequilibrii esse $MV = mv$, ubi M, m denotant pondera quaelibet, V, v velocitates initiales. Iam vero si spatia dicantur S, s, tempora T, t; erit $V = \frac{S}{T}$, $v = \frac{s}{t}$ (§. *II. art. I. cap. I. sect. I.*), ideoque $\frac{ms}{t} = \frac{MS}{T}$ vel $ms = MS$, quum in machinarum actione tempora sint aequalia. Eo itaque reducitur machinae cuiuslibet actio, ut potentia m, quae tempore unius horae, e. g. describere

potest spatium s, pondus M per spatium S Fig.
sublevare valeat. His positis, si m exhibeat pondus exiguum, M vero massam valde magnam; evidens est, productum ms repraesentare non posse momentum valde magnum, nisi spatium S eo minus sit respectu s, quo maius est pondus M respectu potentiae m. Quare si s repraesentet spatium valde magnum, oportet, ut tempus in eadem ratione maius sit; quum necessario determinatum sit spatium dato aliquo tempore unius horae percurrendum. Hinc ergo colligitur, in machina qualibet etiam perfectissima compendium virium necessario coniunctum esse cum temporis et spatii dispendio. Quare minime credendum est imperitis, ut non raro contingit, hominibus, qui ingentia pondera brevissimo tempore ad magnam altitudinem attollere pollicentur.

In aestimandis viribus ipsa virium directio considerari omnino debet. Sit C in ve- 20.
cte KL centrum motus, sintque A et B vires duae, quae agant secundum directiones KA et LB. Ex centro motus ducantur CM, CN perpendiculares ad directiones virium in M et N. Ponatur CM minor, quam CN, et ex centro C intervallo CN describatur circulus NHD rectae KA occurrens in D. Vis absoluta A repraesentetur per DA. Haec resolvi debet in vim DG secundum directionem CD, et in vim DF perpendicularem

ad *CD*, completo scilicet parallelogrammo *AFDG*. Iam vis *DG* agens contra directionem *CD* a centro scilicet circuli vel rotae *DHN* versus circumferentiam, nihil valet ad convertendam rotam circa *C*: sola vis *DF*, quam *relativam* appellant, hunc effectum producere potest; ac proinde vis absoluta est ad vim relativam, ut *DA* ad *DF*. Praeterea vis *B* tendens ad partem contrariam considerari potest applicata in *N* vel *L*. Vis enim eadem manet, in quocumque directionis suae puncto constituatur. Pondera enim eadem manent in variis a terra distantiis, ac proinde et vires, quae ponderibus aequivalent. Iam si vis *B* aequalis ponatur vi respectivae *DF*, erunt conatus aequales et oppositi, ac proinde in aequilibrio ob distantias *CD* et *CN* aequales. Erit ergo in casu aequilibrii vis relativa per *DF* ad vim absolutam per *DA*, ut *DF* ad *DA*, ut *B* ad *A*, atque ob triangula *AFD*, *DMC* similia, erit $B : A = DF : DA = CM : CD = CM : CN$. Hanc ergo generalem demonstravimus pro qualibet virium directione aequilibrii legem. Nempe vires esse in ratione reciproca perpendicularium, quae ex centro motûs ad respectivas virium directiones ducuntur.

Schol. II. Ad demonstrandam aequilibrii legem virgam inflexibilem, gravitate et inertia carentem, qualis nulla exsistit in rerum natura, fingunt physici. Igitur in aestiman-

dis ponderibus, gravitatis virgae ratio habenda Fig.
est. Id vero staterae romanae exemplo declarare non abs re erit. In hac machina considerentur brachia duo inaequalia *CA*, *CB*, quo- II.
rum nota sint pondera. Iam brachiorum pondera in suo gravitatis centro respective collecta fingi possunt, ac proinde momentum brachii utriusque erit, ut productum ex pondere in distantiam centri gravitatis a puncto suspensionis *C* respective, eritque momentorum differentia excessus ponderis, qui proinde auferri debet, ut iustum pondus habeatur. Quia vero brachia sunt homogenea, centrum gravitatis in brachiorum medio constitutum est. Sunt autem tota inter se, ut medietates. Quare pondus uniuscuiusque brachii ducatur in suam a centro suspensionis distantiam; momentorum differentia erit ipsum pondus subtrahendum. Ex his patet, stateram romanam ob brachiorum inaequalitatem minus accuratam exhibere ponderis mensuram; fraus autem maxime crescere potest, si brachia non fuerint homogenea. *Sed etiam vitium istud corrigi potest, si in minori brachio* CD *suspendantur ponduscula, vel illud crasius fiat, quod vulgo observatur.* Hinc stateram vulgarem seu libram ob brachia aequalia in commercii usu adhibere praestat. Si autem statera illa fraude aliqua peccaverit, facile detegitur dolus, permutatis ponderibus. Ex demonstratis enim facile intelligitur, nullum

in statera dolum latere, si in utroque casu maneat ponderum aequalitas. At statera romana ad examen haud facile revocari potest, quod quidem machinae huius vitium est maximum.

Schol. III. In omnibus machinis aliud est incommodum omnino inevitabile, mutuus nempe partium attritus. Nulla enim machina moveri potest, nisi partes aliae super alias incedant atque labantur. Nulla autem est superficies etiam eximie laevigata, quae plurimis non emineat asperitatibus, et, ut ita dicam, monticulis, quod quidem demonstrant observationes microscopicae. Illae vero asperitates sine resistentia, sine difficultate aliqua superari non possunt. Igitur quae hactenus demonstravimus de machinarum viribus, dicta volumus dumtaxat in hypothesi, quod omnia abessent impedimenta, quae profecto efficiunt, ut ad movendum pondus maior potentia requiratur, quam quae ex praecedenti doctrina definitur. At quo magis impedimenta de medio tolles, eo propius experimenta ad demonstrationes physicas accedent.

Schol. IV. Resistentiam ex mutuo partium attritu oriundam variis experimentis aestimare tentarunt diligentissimi physici, sed irrito, ut nobis videtur, conatu. Alii resistentiam illam ex ipsa superficierum magnitudine computandam esse existimarunt, alii ex corporum pondere, alii tandem ex ipsa ve-

locitate. At mihi facile persuadeo, ex his tribus conditionibus pendere mutuum partium attritum. Et quidem quo maior est superficies, eo plures occurrunt superandae asperitates. Praeterea quo maius est corporis pondus, eo altius corporis unius asperitates alterius corporis cavitatibus inferuntur. Tandem quo maior est velocitas, eo plura dato aliquo tempore superanda occurrunt impedimenta. At praeter conditiones illas maxime etiam considerari debet ipsa superficierum natura: prominentium scilicet partium asperitas, nũmerus, textura, durities, aliaeque plurimae qualitates nullo experimento satis accurate definiendae. Atque hinc fit, ut varia experimenta varias praebeant resistentiarum mensuras. Tandem in aestimanda resistentia considerari etiam debet vectis longitudo, quam tamen praetermittere solent pleriqũe physici, perperam quidem. Etenim mutuus partium attritus corporis motum destruit ac retardat, non secus ac faceret potentia, quae ad partes directioni motus contrarias, ageret, ac proinde ad aestimandam resistentiam satis non est resistentiae absolutae rationem habere, sed vectis longitudo attendi etiam debet. Exemplo sit trochlea circa axem mobilis, cuiũs ope pondera attolli solent. Resistentia ex mutuo partium attritu oriunda est mutuus axis trochleae et cavitatum, quas ingreditur, attritus. Quare resistentia illa eo breviori ve-

ctis brachio applicatur respectu potentiae trochleam moventis, quo minor est axis diameter respectu diametri trochleae. Atque hinc fit, ut multo minor sit trochleae circa axem mobilis resistentia. Inde etiam intelligitur trochlearum rotarumque maiorum commoditas, et ex iisdem principiis pendet vulgaris usus, quo nempe ad retardandum rapidiorem currus descensum sufflaminari solent rotae. Etenim resistentia ex partium attritu oriunda rotae circumferentiae in hoc casu applicatur, secus autem ipsius axis peripheriae. Ex hactenus explicatis derivari possunt in datis casibus utilissima sane artificia ad minuendam mutui attritus resistentiam. Sed rem fusius persequi non est huius loci.

Defin. 111. Ex centri gravitatis doctrina non solum pendent machinarum vires, sed alia quoque phaenomena plurima, quorum pauca proponere satis erit. Si ex centro gravitatis corporis alicuius ducta intelligatur recta ad horizontem perpendicularis, haec vocatur *linea directionis*. Porro linea illa vel cadit intra basim vel extra ipsam excurrit. Quare quum in ipso gravitatis centro totum corporis pondus locatum fingi possit; patet, in primo casu nullum esse ruinae periculum; si nempe linea directionis intra basim cadat; sustinetur enim corpus. Contra autem linea directionis extra basim excurrente corpus labit et praeceps ruere necessum est, nisi ipsa

obstaret partium tenacitas. Mirum ergo non est, quod turres pisana et bononiensis, licet maxime inclinatae, firmae tamen et stabiles consistant. Hinc naturali quadam mechanica corpus retrorsum inflectunt imperiti quoque homines, si per locum declivem descendant; contra autem si adscendant, corpus antrorsum incurvant, ut nempe linea directionis in basim retrahatur. Hinc homines ambulantes singulis passibus a dextera ad sinistram, et vice versa corpus convertunt. Hinc homines pingues et obesi situm rectum adfectare solent. Eadem de causa baiuli, qui pondus alterutra manu gestant, manum alteram in partem oppositam extendunt. Tandem eodem artificio funambuli sese in omnes partes pro necessitate contorquent, et longiori pertica utuntur, quam hinc et inde versant maxima indusrria, ut linea directionis extra angustissimum funem non excurrat.

Schol. v. Centri gravitatis inveniendi rationem formula algebraica exhibere solent geometrae. Nobis vero, qui rerum facilitati maxime studemus, centrum gravitatis in corpore quocumque mechanice invenire satis erit. Corpus aliquod filo suspendatur, volvetur converteturque corpus illud, donec filum ad terrae superficiem perpendiculariter dirigatur: centrum gravitatis erit in hac perpendiculari, nempe in linea directionis, quod quidem evidens est ex gravitatis directione et

ex ipsa centri gravitatis natura. Iam attramento vel colore aliquo facile conspicuo in ipsa corporis superficie notetur linea, quam perpendiculi filum fecerit. Rursus ex alio puncto suspendatur corpus, invertaturque corporis situs, et pari modo linea perpendiculi signetur. Communi duarum linearum intersectioni imminebit centrum gravitatis. Iam vero si per communem linearum intersectionem intra corporis cavitatem ducta intelligatur perpendicularis, haec transibit per centrum gravitatis, et designabit rectam, secundum quam corpus sustineri, vel suspendi debet, ut maneat in aequilibrio. Res eadem facilius praestari potest adhibita tabula horizontali probe laevigata. Promoveatur nempe corpus, quantum fieri potest versus marginem tabulae ita, ut tamen non cadat, notetur in ipsa corporis superficie linea, quae est communis intersectio superficiei et tabulae. Deinde iterum invertatur corporis situs, promoveaturque, ut antea, habebuntur communes intersectiones duae, nempe secundum longitudinem et latitudinem, quarum communi intersectioni intra ipsum corpus subiacebit centrum gravitatis. Cetera se habent ut antea. Ceterum evidens est, in corporibus homogeneis, quae nempe in partes aequales et similes dividi possunt, centrum gravitatis idem esse cum puncto corporis medio, quod *centrum figurae* vel *magnitudinis* solet appellari.

Schol. VI. Dato gravitatis centro in quolibet corporum numero commune gravitatis centrum omnium ex antea demonstratis facile invenitur. Si bina fuerint corpora quaecumque, centrum commune gravitatis erit in recta iungente utrumque gravitatis centrum; in medio si fuerint aequalia. Si vero inaequalia, ita propius erit centrum commune gravitatis massae maioris centro, ut distantiae sint ipsis massis reciproce proportionales (*ex demonstratis*). Si corpora sint tria, coniuncto gravitatis centro communi binorum corporum cum centro tertii, divisaque recta iungente in ratione reciproca massae minoris ad summam massarum; punctum hoc modo inventum erit centrum commune quaesitum. Eadem ratione progredi licet ad massas quascumque. Haec autem omnia facile deducuntur ex demonstrato aequilibrii principio, si nempe consideretur corporis pondus tamquam coactum in centro gravitatis. Atque eadem ratione evidens est, centrum gravitatis esse unicum. Fingamus enim, aliud esse punctum. Iam quia totum corporis pondus in centro gravitatis adunatum fingi potest; corpus suspensum extra gravitatis centrum, quantum fieri potest, descendere debet, nec potest quiescere, donec ad punctum infimum pervenerit. At proprietatem illam punctis duobus convenire repugnat. Itaque si corpora quotlibet inter se quomodocumque connexa e centro gravita-

tis communi suspendantur, totum corporum systema in aequilibrio manere concessum est. Haec pauca dicta sint de centro gravitatis, non quidem pro rei dignitate, sed quantum postulare videtur harumce institutionum ratio.

APPENDIX.

De quibusdam capitis praecedentis utilitatibus.

I.

Quod ad gravitatis doctrinam spectat, illius utilitas manifesta fiet ex dicendis deinde, ubi scilicet motus ex gravitate oriundos explicabimus. Interim vero observare satis sit, ex variis philosophorum hypothesibus de causa gravitatis, et ex ipsius rei difficultate omnino evinci, in physica sua esse et quidem abditissima arcana, quae nulla humani ingenii vis reserare potest. Si autem in rebus limitatis a Deo creatis insuperabiles persaepe occurrunt difficultates, quod quidem a nemine suae tenuitatis et ignorantiae conscio negari potest, ¿qua fronte creatorem infinitum et sanctissima religionis mysteria curiosius scrutari atque penetrare tentant superba impiissimorum hominum ingenia, qui id omne respuunt, et velut a ratione alienum fastidiose traducunt, quod suo imbecilli quidem ingenio non possunt comprehendere? Itaque apud

religiosos probosque philosophos ea semper obtinere debet praestantissima et unica philosophandi ratio, quae fundatur in experimentis et observationibus. Haec vero si ad physicam mechanicamque causam non semper nos deducat, ad causam infinitam, Deum conditorem et dominum nos certissime perducet. Hic est fructus philosophiae uberrimus, naturae maiestatem propius intueri: naturae auctorem impensius colere et venerari: illique soli servire. His autem pietatis et religionis ergo praemissis, iam inter innumera capitis praecedentis utilitates pauca seligamus.

Ad explicandos animalium motus maxime valet, praecedentis capitis doctrina, quam quidem utilitatem satis demonstravit Iohannes Alfonsus Borrellus in eximio opere, cui titulus est: *de motibus animalium*. Paucis exemplis rem declarare satis erit. Fingatur brachium horizontaliter extensum, extremisque digitis adligatum intelligatur pondus viginti octo librarum, qūod quidem onus ab homine satis robusto in hoc situ sustineri posse experientia compertum est. Tale pondus sustinetur vi musculi, cuius extremitas superior adnexa est capiti rotundo ossis humeri, altera autem extremitas capiti rotundo ossis cubiti adligatur. Iam cubitus cum manu extensa circa centrum articulationis in osse cubiti revolvi potest. Notum praeterea est ex diligentiori anatome, distantiam musculi

a centro articulationis esse ad ponderis ab eodem centro distantiam, ut 1 ad 20. Quare ut habeatur momentum musculi, multiplicari debet pondus absolutum, nempe 28 librarum per 20, distantiam scilicet a centro motus, efficiturque productum 560 librarum. Tanta nempe est vis musculi, ut libris 560 aequivaleat, ob superandam vectis longitudinem. Id vero ex demonstratis facile intelligitur. Simili ratione ad calculum revocari possunt in alio quolibet casu musculorum vires, dummodo per anatomen data sit distantia a centro motus, et per experientiam superata resistentia innotescat. Porro heic obiter observanda est admirabilis plane musculorum dispositio. Musculi scilicet ossibus adligantur in minori a centro motus distantia ita, ut potentiam musculi multo maiorem esse oporteat. Quamvis autem animalibus orta inde videri possit aliqua virium iactura, in hac tamen structura omnipotentem creatoris manum plane mirari debemus. Si enim potentia longius distaret a centro motus, iam ob maiorem articulationis distantiam non solum deformis atque molesta foret musculorum animaliumque figura; sed etiam ad motum minus idonea, suaque mole ac crassitie animalia laborarent.

II. Ad firmitatem aedificiorum aestimandam eadem principia transferri possunt. Fingantur trabes duae similes cylindricae vel pri-

smaticae *ABDE*, *FGHK* muro immobili Fig.
IL infixae. Divisae intelligantur *AB*, *FG* 21.
aequaliter in *C*, *M*. Iam illarum pondera fingi poterunt collecta in punctis *C*, *M* centro gravitatis directe oppositis. Facilitatis ergo ponatur $AB = 2FG$, erit pondus trabis *ABDE* octuplo maius pondere trabis *FGHK*. Sunt enim trabes illae, utpote similes, in ratione triplicata laterum homologorum (*ex elementis geometriae*). Quare quum pondus trabis *ABDE* locatum fingatur in *C*, sitque *AC* duplo maior distantia *FM*; erit momentum totum ad rumpendam trabem in puncto *A* decies sexies maius momento trabis alterius. Iam conferantur vires, quae trabes illas integras muroque infixas servare conantur. Sit *AREP* trabis maioris sectio, et *FSKQ* minoris. Dividatur *AE* et *FK* aequaliter in *P* et *Q*; erit in qualibet sectione fibrarum *longitudinalium* numerus, ut sunt sectiones ipsae, ac proinde ut quadratum rectae *AE* ad quadratum rectae *FK* (*ex elementis geometriae*) nempe ut 4, ad 1; ideoque etiam cohaesio, quae est, ut fibrarum numerus, erit in eadem ratione. Sed cohaesio illa considerari potest, ut vis resistens, cuius proinde resistentiae ut habeatur momentum, haec collecta poni debet in centro gravitatis *P* et *Q*. Ideoque quum sit $AP = 2FQ$; erit in prima trabe momentum resistentiae octuplo maius. At momentum vis, quae trabem maiorem in

puncto *A* rumpere, et a muro avellere conatur, est decies sexies maius. Vnde evidens est, vires, quae ad trabes rumpendas tendunt, crescere in ratione quadruplicata longitudinum; vires autem oppositas, adhaesionis nempe, crescere tantum in ratione triplicata. Hinc trabes maiores, servata licet partium proportione, rumpuntur facilius; immò tanta esse potest illarum longitudo, ut proprio pondere fractae necessario ruerent. Merito igitur concludit Galilaeus, aedificium aliquod firmum stare posse, quod proculdubio rueret in formam iusto ampliorem redactum, manente licet partium proportione; quod quidem in arte architectonica utilitate non vacat.

Ex eodem principio infert celeberrimus Auctor, suos esse in operibus naturae et artis limites, quos ultra consistere eadem opera minime valerent. Ita si arbores nimio donarentur volumine, gravitate sua oppresi rami facile rumperentur. Simili ratione crassiora animalia vim non habent, quae illorum magnitudine respondeat. Atque hinc si aliqua forent terrestria animalia multo maiora iis, quae novimus; vix organicos motus exsequi possent, suaque mole fatiscerent, perpetuisque obnoxia essent periculis. Ex hac doctrina concludere audent intemperantiores quidam critici, nullos umquam exstitisse homines, qui iustam vulgaremque hominum

magnitudinem multum excederent. Nec scriptores illos hac in re valde moratur s. scripturae auctoritas. Aiunt enim, nominibus hebraeis *nephilim* et *gibborim*, quae in primigenio textu leguntur, et in vulgata nostra gigantum nomine redduntur, significari etiam posse scelestos homines, suisque flagitiis non minus quam staturae magnitudine famosos. Quod autem refertur *Deut. 3.* de lecto Og, *qui novem cubitos habebat longitudinis et quattuor latitudinis*, de sola lecti magnitudine iidem auctores intelligunt, eamque ferunt apud orientales populos consuetudinem, ut amplissimos lectos ad pompam ornarent, et in tali ornamento fastum collocarent. Verum quidquid sit de hebraicorum nominum ambiguitate, eam omnino dirimit vulgatae versionis et 70 interpretum auctoritas, nullumque dubitandi locum relinquit gigantis Goliath altitudo, quae *lib. 1. reg. cap. XVII. v. 4.* describitur: *sex cubitorum et palmi.* Itaque ex dictis hoc unum colligere licet, praeter consuetas naturae leges conformatos fuisse enormes gigantes, et singulari virium proportione donatos. Quod quidem exemplo suo confirmant aliqui inusitatae staturae homines, qui his nostris temporibus per urbes vagantur, suaeque magnitudinis beneficio victum quaeritant. Tales autem homines, si cum antiquis gigantibus conferantur, veluti nani et pumiliones haberi debent; sua tamen ma-

gnitudine quasi opprimi et laborare observantur. Necessaria ergo fuit antiquis gigantibus insolita et praeter naturae humanae ordinem virium proportio; praesertim si verum sit, quod de gigantibus illis legitur; aliquos scilicet longe ultra vulgarem hominum aetatem et per multa saecula vixisse. Idem dicendum de gigantibus, quos etiam num hodie magno numero exstare narrant viatores nonnulli, quibus tamen facilius, et nisi dicto fides constiterit, credendum non est.

Fornicum stabilitas ex centri gravitatis doctrina omnino pendet. Rem leviter attingam. Intelligatur fornicis arcus ex diversis constans lapidum segmentis, cuneorum instar dispositis et ad arcus centrum tendentibus. Lapis arcus superior, qui fornicis *conclusiva* seu *clavis* appellari solet, perpendicularis est ad horizontem, atque hinc et inde contiguis lapidibus sustinetur. Ductae concipiantur verticales per singula gravitatis centra in singulis lapidum segmentis. Iam lapis superior lapidibus contiguis veluti planis inclinatis incumbit; ac proinde tota vi gravitatis non tendit ad descensum, sed aliqua tantum gravitatis parte, quae eo maior est, quo minus inclinata sunt contigua lapidum plana. Quare si planorum inclinatio fingatur infinite parva, hoc est, si lapidum segmenta forent ad horizontem perpendicularia non secus ac fornicis clavis; iam clavis tota vi gravitatis ad

descensum tenderet, et re ipsa descenderet, nisi arenato et calce retineretur, atque hinc minus tuti sunt et facile ruinosi fornices plani. Sed accuratos fornices consideremus. Clavis intra contiguos lapides constricta per lineam verticalem ad descensum tendit. Hunc vero conatum exercere non potest, nisi hinc et inde premat contigua lapidum segmenta, eaque conetur repellere. Haec autem clavis actio in lapidem contiguum exhibetur per rectam ex centro gravitatis clavis perpendiculariter ductam ad lapidis contigui superficiem. Patet autem ex virium compositione et resolutione, hanc lineam esse diagonalem parallelogrammi, cuius latera duo sunt vis perpendicularis, qua clavis tendit ad descensum, et vis horizontalis, qua clavis tendit ad removendum lapidem contiguum. Secundum illud lapidis segmentum vi clavis per diagonalem praedictam impulsum, urgetur quoque vi gravitatis ad horizontem perpendiculari. Atque hinc oritur vis alia composita, qua urgetur lapis alius contiguus, atque ita deinceps ad ultimum usque lapidem fornicis fulcro insistentem. Iam vero ea esse debet singularum fornicis partium structura atque sectio; ut lapides singuli a fornicis clavi ad fulcrum vim compositam exerceant, ad horizontem per gradus minus ac minus inclinatam; atque ita vis tota in ipsum fulcrum fere perpendiculariter dirigatur. Super-

est iam, ut vim horizontalem ipsiusque fulcri resistentiam consideremus. Totum dimidii fornicis pondus collectum fingatur in centro gravitatis, ex quo ad superiorem lapidis ultimi superficiem ducta intelligatur perpendicularis. Secundum hanc directionem dumtaxat dimidius fornix in ultimum fornicis segmentum agere potest. Haec autem vis ad fulcrum debet referri, et in duas vires dividi, verticalem unam, horizontalem alteram. Vis ad fulcrum perpendicularis fulcrum ipsum magis premit atque confirmat, vis autem horizontalis ad fulcrum evertendum tendit. At fulcrum totam gravitatem huic conatui opponit; haec autem gravitas agit per lineam verticalem e centro gravitatis ductam ad basim ipsius fulcri. Itaque in aestimandis fornicum viribus duae considerandae sunt actiones contrariae, prima horizontalis, qua fornix ad fulcrum subvertendum tendit; perpendicularis altera, nempe fulcri resistentia. Tandem duae illae actiones ad centrum motus in ipsa basi referendae sunt. Atque eo maius est virium illarum momentum, quo maior est a centro motus distantia. Tota ergo huc reducitur fornicis stabilitas, ut nempe dimidii fornicis actio horizontalis fulcri resistentia maior non sit. Haec sunt utilissimae doctrinae elementa, quae ad calculum facile revocabunt geometrae. Nobis autem satis sit rem generatim indicasse.

III. Ad principia in praecedenti capite

explicata pertinet horologiorum rotis instructorum motus. Sed utilitas melius intelligetur deinceps, demonstrata scilicet pendulorum doctrina. Vnicum aliud utilitatis exemplum adferemus. Nemo non videt in *portatilibus* horologiis *machinulam conicam*, quam catenula amplectitur. Huius figurae ratio ut intelligatur, observandum est, desinente horologii motu catenulam cylindrico horologii tympano totam circumplicari. Si autem horologio motus restituatur, catenula e tympano ad conicam machinulam transire debet. Id vero fieri non potest, nisi tympanum convertatur, totque revolutiones perficiat, quod gyris catenula ipsa tympano convolvitur. Praeterea talis est in tympano partium structura, ut eo per vices revoluto, magis ac magis tendatur lamella elastica in tympano conclusa. His praemissis evidens est, maiorem tunc haberi lamellae elasticae tensionem, ac proinde maiorem vim, dum catenula tota conicae machinulae circumponitur. Haec autem tensio per gradus decrescit, dum machinula revolvitur, ac tandem vis fit omnium minima, dum gyros fere omnes catenula absolvit, et puncto ultimo proxima est. Itaque patet, ex illa vis motricis inaequalitate futurum esse; ut perpetuae variationi obnoxius foret rotarum motus nisi figura conica paratum fuisset huic incommodo remedium. Igitur ad corrigendam motus inaequalitatem efficiendum erat, ut ma-

iore exsistente vi motrice minor foret distantia a centro motus, ideoque et minor machinulae diameter, et contra. Oportet nempe, ut in machinulae puncto quolibet productum ex vi tensionis in distantiam a centro motus sit constans semper et aequale. Hoc enim artificio fit, ut vis motrix eadem perpetuo maneat, atque uniformiter fere moveantur rotae, non secus ac facerent appenso aliquo constanti pondere. Quum ergo demonstrata principia accuratam nobis suppeditent temporis mensuram, hanc quoque utilitatem inter innumeras alias commendare voluimus. Problema est apud geometras notissimum: invenire curvam, cuius revolutione genitum solidum quaesitam praeberet in horologiis motus aequabilitatem, ex qua proinde curva formari deberet praedicta machinula. Verum res est sublimioris indaginis, atque motus uniformitatem convenientemque figuram repetitis experimentis accuratissime inveniunt peritiores horologiorum artifices. Talis figurae rationem exposuisse satis sit.

SECTIO II.

De reliquis universalibus corporum proprietatibus ex virium notione derivandis.

CAPVT I.

De motu in genere variisque illius speciebus.

Ex ipsa virium notione derivari *mobilitatem* et *quiescibilitatem*, evidens est. Motus enim est virium effectus, et seclusa vi qualibet impressa, corpus semel quiescens perpetuo quiesceret. Amplissimum quidem patet huius capitis argumentum; sed praecipuas dumtaxat motuum species expendemus. Et 1.° quidem de motu generatim paucis praemissis, ad motum rectilineum et deinde ad curvilineum progrediemur. Illas autem dumtaxat motuum leges explicabimus, quae in rerum natura maxime obtinent, praetermissis variis motuum variabilium pro arbitrio confictis hypothesibus. Tandem corporis solitarii motu considerato, diversos corporum motus inter se comparabimus, et conflictuum regulas demonstrabimus.

ARTICVLVS I.

De motu generatim conſiderato.

DEFINITIO I.

Motum iam antea definivimus: *continuam loci mutationem*. Vnde intelligitur, quietem eſſe *perſeverantiam* in eodem loco. Quare quum *mobile* non conſideremus, niſi quatenus locum mutet, et a magnitudine aliisque adfectionibus quibuscumque abſtrahamus; mobile inſtar puncti conſideratur, quamdiu ſolius mutationis loci ratio habetur, atque ideo durante motu lineam deſcribere ponitur. Continuo enim motu puncti linea deſcribi concipitur. Locus, a quo mobile recedit vel recedere conatur, dici ſolet in ſcholis *terminus a quo*: locus vero, ad quem mobile accedere conatur, *terminus ad quem* appellatur.

Defin. II. Locus duplex diſtinguitur, *abſolutus et relativus*. Locus *abſolutus* dicitur: *pars ſpatii immobilis et immenſi, quam res occupat*; locus autem *relativus* eſt: *ſpatii alicuius dati pars illa, quae tamquam immota ſpectatur, et in qua res locatur*. Hinc patet, fieri poſſe, ut mutetur locus abſolutus, non mutato loco relativo, et vice verſa. Nam ſi nauta in navi, quae plenis ve-

lis fertur, dormiat, locum suum absolutum mutat cum navi ipsa; servat vero eumdem locum relativum respectu partium navis. At si nauta pari velocitate, qua fertur navis ipsa, progrederetur contra navis directionem, mutaret locum relativum, manens in eodem loco absoluto. Itaque pro varia loci mutatione motus vel est absolutus, si mutetur locus absolutus; vel relativus, si mutetur locus relativus. Idem dicendum est de quiete, quae est perseverantia in loco vel absoluto vel relativo. Fieri igitur potest, ut ea, quae absolute quiescunt, nobis videantur moveri, dum nempe locum suum mutant relative ad alia obiecta, quae tamquam immota consideramus, vel quorum motum non percipimus. Nam quum omne corpus nobis conspicuum suam imaginem ope radiorum ab eodem obiecto prodeuntium in oculi fundo seu in retina depingat; ea obiecta moveri videntur, quorum imagines in retina moventur, seu diversas retinae partes continuo ac successive occupant, dum quis oculum suum velut immotum fingit. Contra autem velut quiescentia cernimus obiecta illa, quorum imagines eamdem semper occupant retinae partem; quum scilicet imaginum motus in fundo oculi non sentitur. Atque hinc est, quod homines in navi sedentes ipsum navis motum non percipiant. Omnes quippe navis partes inter se relative quiescentes eamdem,

quod ad oculum, positionem et distantiam servant, imaginesque suas in iisdem retinae partibus delineant. At quum oculos ad litora convertit spectator, necesse est, ut obiecta in litore posita situm suum respectu oculi continuo mutent, ac proinde imagines suas in aliis aliisque retinae partibus successive pingant. Qua ratione fit, ut litora urbesque moveri videantur.

Omissis quaestionibus plurimis et omnino superfluis de natura motus, considerare satis erit motum veluti certissimum atque indubitatum naturae effectum, a nemine nisi sceptico negandum. Et quidem experientia quotidiana constat, plura corpora inter se relative moveri cum infinita propemodum varietate; sed corpus unum non potest moveri relative ad alterum, nisi alterutrum saltem moveatur absolute. Etenim si corpora duo absolute quiescunt, positionem suam inter se non mutant, ac proinde si unum spectetur ut immotum, alterum etiam immotum apparebit, nullaque erit locorum mutatio relativa; ergo ex motu relativo evidenter demonstratur motus absolutus. Serio refelli non merentur ineptissimae veterum scepticorum argutiae, quibus impossibilitatem motus adstruere stultissime laborabant. Tales cavillationes risu excipi debent, quemadmodum ab Herophilo medico factum fuisse, narrat Sextus Empiricus. Hoc argumentum proposuerat Diodo-

rus Chronus sophista: si corpus moveretur, vel moveretur in loco, in quo est; vel in loco, in quo non est; atqui nec moveri potest in loco, in quo est, ut enim moveatur, debet mutare locum; nec moveri potest in loco, in quo non est, siquidem nec agere, nec pati potest, ubi non est; ergo corpus nullo modo moveri potest. Hoc sophisma lepide solvisse fertur Herophilus. Quum enim a Diodoro, ut luxatum ipsius humerum restitueret, vocatus esset, subridens dixit, eum forte alio morbo laborare: humerum e suo loco excidere non potuisse, quum nequeat moveri. Etenim, aiebat Herophilus, si motus esset, vel motus est in loco, in quo erat, vel in quo non erat; sed neutrum fieri potest; ergo humerus luxatus non est. Sophista, cui non placebat argumentum, rogavit medicum, ut dictorum oblivisceretur, et remedium malo adhiberet. Ceterum statim patet sophisma. Nec enim corpus movetur in loco, in quo est, nec in loco, in quo non est, sed movetur e loco in locum, seu dum continuo mutat locum, et de loco, in quo est, transfertur ad locum, in quo non erat. Nihilo solidius est vulgatissimum Zenonis argumentum. Sophisma est huiusmodi. Ponatur Achillem cursu velocissimum a testudine animali tardissimo distare intervallo passuum mille, atque eum centies velocius testudine moveri. Dum Achilles unum percurrit milliare,

testudo milliaris partem unam centesimam conficiet, ideoque Achilles testudinem nondum est adsecutus. Rursus dum Achilles partem illam milliaris centesimam percurrit, testudo interim per milliaris partem decem millesimam reptabit, ideoque nec adhuc testudinem erit adsecutus Achilles. Eodem modo dum Achilles partem illam milliaris decem millesimam decurrit, testudo per milliaris partem millionesimam promovebitur, ideoque nec testudinem potest attingere. Atque sic progredi licebit in infinitum, nec Achilles umquam poterit testudinem captare.

En celebre Zenonis sophisma, quod *Achillem* ob vim ipsius, quam existimabat insuperabilem, appellitabat. Hanc cavillationem scriptis tractatibus integris solverunt aliqui: deambulando autem solvebat Diogenes. Sophismatis fallaciam statim demonstrant arithmetici. Hoc enim in arithmetica demonstratum est, (§.*VI. cap.VI. arithm. et alg. ad calcem*) summam seriei cuiusvis quantitatum in quavis proportione geometrica in infinitum decrescentium aequalem esse quantitati finitae. Sed milliaris

pars, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000000}$, $\frac{1}{100000000}$,

et sic in infinitum, est series quantitatum in progressione geometrica decrescentium; ideoque illius summa cum sit aequalis quantitati finitae, a mobili tempore finito percurri pot-

est. Ponamus, Achillem spatio unius horae milliare peragrasse; ergo et partem milliaris centesimam in parte horae centesima conficiet, et partem milliaris decem millesimam in horae parte decem millesima percurret, et ita in infinitum. Si huius seriei in infinitum continuatae summa infinito temporis spatio responderet; iam Achilles testudinem numquam adsequeretur tempore finito. Verum, ut dictum

est, horae pars $\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000}$ cet.

quantitati finitae aequalis est, uni scilicet parti nonagesimae nonae unius horae, ut facile demonstratur in arithmetica. Igitur Achilles testudinem adsequetur post elapsam horam unam et partem horae nonagesimam nonam. Itaque evanescit argumentum, cuius vim insuperabilem toties iactaverunt illius patroni: et quidem absurde omnino sibique parum consentientes; quum testudinem et Achillem, etsi numquam se invicem attingerent, magis tamen ac magis ad se mutuo accedere, ac proinde et moveri concedant *. Haec de motu

* *Adolescentes studiosos, quos aequos rerum aestimatores esse cupio, monere debeo, ne de vulgatissimo hoc Zenonis argumento praeceps iudicium ferant, priusquam ipsi intelligant, quisnam esset Zenonis argumentantis scopus, argumentumque penitus*

generatim dicta sint, quibus adiungenda essent alia nonnulla. Sed haec ex primo physices articulo repetenda, ubi ea tractari doctrinae necessitas postulabat.

calleant. Zeno non ita delirus credendus est, (quod tamen vulgo creditur) ut motum etiam veluti naturae phaenomenon negaret, quo sane neque hodierni idealistae omnium gentium maxime deliri pervenere. Argumentum Zenonis versabatur circa obscurissimam quaestionem continui ita, ut si continuum sive sit spatium sive tempus non ex aliis partibus sibi similibus constet, seu quod idem est, si continuum partibus utcumque constet ulterius indivisibilibus; iam in ea sententia Achilles numquam adsequetur testudinem. Hanc de continuo sententiam cum aliis philosophis amplectebatur Zeno, atque in ea adeo perfectae demonstrationis et evidentiae vim habet Zenonis argumentum, ut nemo solutionem hucusque exhibere potuerit, nemo exhibebit in posterum, ut ait P. Boschovichius dissert. de continuitatis lege edit. Romae ann. 1754. *Ceterum si continuum ita sumatur compositum ex partibus similaribus, ut quod de illo praedicatur, etiam de partibus utcumque minimis praedicari possit; iam Zenonis argumenti nulla vis est. Atque haec est continui notio, quae in Auctoris solu-*

ARTICVLVS II.

De rectilineo corporum deſcenſu.

DEFINITIO I.

Motum *variabilem* iam in primo phyſices capite definivimus. Is nempe eſt : *cuius velocitas continuo creſcit aut decreſcit.* Dicitur autem *uniformiter acceleratus*, ſi temporibus aequalibus aequalia accedant velocitatis incrementa. Contra *uniformiter retardatus* appellatur, ſi velocitas temporibus aequalibus ad quietem uſque aequaliter decreſcat. Vniformiter acceleratum eſſe motum vī

tione adſtruitur. Huc itaque tota res redit, ut in quadam ſententia ſit argumentum aliquod invictiſſimum, quod in alia nullius ſit roboris. Quod etiam num frequenter uſu venire ſolet.

Sed neque Zeno eleates, argumentationis auctor, ſcepticus iure dicendus eſt, quum fuerit e ſecta eleatica, a Platone eiusque diſcipulis plurimum commendatus. Porro quamvis ſecta eleatica ſcepticae fundamenta iecerit ; haec tamen, quum longe poſt Zenonis aetatem, auctore Pyrrhone, originem habuerit, cum eleatica confundi non debet.

Fig. gravitatis constantis productum, ex ipsa definitione facile colligitur. Et quidem primo descensum perpendicularem consideremus. Ponatur tempus, quo grave aliquod descendit, divisum esse in particulas aequales et valde exiguas, atque prima temporis particula agat gravitas, et corpus perpendiculariter impellat. Si iam post primum illud tempus omnis gravitatis actio cessare fingatur, nihilominus per vim inertiae adquisitam velocitatem corpus perpetuo servaret. At quum gravitas indesinenter agat, etiam in secunda temporis particula corpus alium gravitatis impulsum priori aequalem accipiet, ac proinde velocitas elapso secundo tempore dupla erit. Simili ratiocinatione patet, velocitatem esse triplo maiorem, elapso tertio tempore; et ita deinceps. Ergo velocitas crescit ut tempus, seu aequalibus temporibus aequalia accedunt velocitatis incrementa, ac proinde motus est uniformiter acceleratus.

Secundo si corpus descendat per planum inclinatum, res eadem facile demonstratur. Et-
22. enim corpus *C* incumbat plano inclinato *AD*. Ex centro *C* ducta intelligatur *CG* ad basim horizontalem *DB* perpendicularis, quae exhibeat gravitatem totam absolutam corporis *C*, et resolvatur in vires duas, quarum una *CF* sit plano inclinato perpendicularis, altera vero *FG* eidem plano parallela. Vis, quae est ut *CF*, nihil confert ad descensum corporis per

planum inclinatum, sed tota impenditur in Fig.
premendo plano; superest ergo dumtaxat vis *FG*: sed ob triangula rectangula *DAB*, *CFG* similia erit *FG* : *CG* = *AB* : *AD*. Haec autem ratio eadem manet in quocumque loco plani inclinati positum sit corpus, ac proinde et eadem est ratio gravitatis absolutae *CG* ad gravitatem relativam *FG* *. Igitur gravitas relativa constans est, ideoque eadem est demonstratio, quae pro gravitate absoluta. Quare motus est uniformiter acceleratus. Contraria ratione intelligitur, motum corporum in eodem plano sursum tendentem esse uniformiter retardatum. Quum scilicet vis gravitatis contra motus impressi directionem perpetuo et uniformiter agens aequalibus temporibus aequaliter motum minuat, usque dum velocitas omnis sursum exstincta sit.

Recta *AB* exhibeat tempus, quo corpus 23.
aliquod per datum quodlibet spatium descendit. Divisum intelligatur tempus in particulas innumeras, *ei*, *im*, cet. Iam velocitas per temporis particulam infinite parvam *ei* erit uniformis, haec autem repraesentetur per *ef*; recta *ik* exhibebit velocitatem particula tem-

* *Vis* absoluta *dicitur, quae totum et integrum effectum producit, quem valet producere.* Relativa *vero, quae aliquatenus impeditur, nec totum, quem potest, producit effectum.*

poris infinite parva *im*, et ita deinceps. Sed (*ex demonstratis in primo articulo*), spatium motu uniformi percursum est, ut productum ex tempore et celeritate. Quare erit spatium percursum tempore *ei* velocitate *ef*, ut rectangulum *if*; eodem modo spatium percursum tempore *im*, et celeritate *ik* erit, ut rectangulum *mk*; et sic de ceteris. Quare erit spatium his omnibus temporibus percursum, ut omnia haec rectangula. Quum autem temporis particulae sint infinite parvae, rectangulum *if* non differt a trapezio *eifk*, ac proinde rectangulorum omnium summa aequalis est triangulo *ABC*. Iam vero ob motum uniformiter acceleratum tempora *Ao*, *AB* sunt ut velocitates *or*, *BC*, ac proinde similia sunt triangula *Aor*, *ABC*; ideoque sunt ut quadrata laterum *Ao*, *AB*, vel *or BC*, hoc est

Prop. 1. IN MOTV VNIFORMITER ACCELERATO SPATIA SVNT, VT QVADRATA VELOCITATVM AVT TEMPORVM; AC PROINDE ETIAM, QVOD IDEM EST, VELOCITATES AVT TEMPORA SVNT IN RATIONE SVBDVPLICATA SPATIORVM.

Ex hac uniformis accelerationis lege statim evidens est.

Coroll. 1. Spatium dato tempore *AB* percursum est dimidium eius, quod eodem tempore *AB* celeritate *BC*, seu quae ultimo ad-

quiritur in motu uniformiter accelerato, motu aequabili percurreretur.

Etenim spatium velocitate uniformi BC tempore AB percursum repraesentatur per rectangulum $ABCD$ duplum trianguli ABC. Igitur dimidium spatium, quod est ut triangulum ABC: velocitate uniformi et finali BC dimidio tempore percurritur. *Sunt enim in motu uniformi spatia percursa uti tempora.*

Coroll. II. Si corpus aliquod vi gravitatis constantis tempore quolibet dato datum spatium percurrat, tempore duplo describet spatium quadruplum, tempore triplo spatium noncuplum cet.

Nempe si tempora fuerint in proportione arithmetica 1, 2, 3, 4 cet. spatia percursa se habent in ratione 1, 4, 9, 16 cet. hoc est, si corpus minuto uno secundo describat pedes 15, duobus secundis percurret pedes 15×4 tribus secundis 15×9, et ita deinceps.

Coroll. III. Igitur spatia singulis temporibus seorsum descripta sunt, ut numeri impares 1, 3, 5, 7 cet.

Quod patet. Si enim ex spatio 4 duobus primis temporibus percurso auferatur 1, spatium scilicet primo tempore descriptum, remanet 3 spatium descriptum secundo tempore, et ita dicendum de aliis quibuslibet temporibus. Ceterum patet, haec omnia convenire etiam corporibus, quae per plana inclinata descendunt. Demonstravimus enim, hunc

esse plani inclinati effectum, ut corporis gravitatem absolutam minuat, manente tamen constante gravitatis parte reliqua.

Hinc merito inter machinas recensetur planum inclinatum. Quum enim *machina* appelletur, quidquid ad motum faciliorem confert; evidens est, machinis adnumerandum esse planum inclinatum, quum aliquam gravitatis absolutae partem sublevet, eam tantum superandam relinquens gravitatis partem, quae plano inclinato parallela est.

Constantem esse gravitatem terrestrem, iam antea ostendimus. Itaque quidquid demonstratum est hactenus, ad gravium descensum transferri debet. Ac proinde dato quolibet tempore inveniri potest spatium vi gravitatis cadendo descriptum, et vice versa dato spatio definitur tempus. Sit altitudo quaelibet vel spatium cadendo percurrendum a, tempus datum t, spatium data aliqua temporis parte 1 descriptum dicatur s, erit $1 : s = t^2 : a$, ideoque $a = st^2$, et $t^2 = \frac{a}{s}$; quare $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{s}}$. E. g. si corpus pedes 60 percurrat tempore minutorum duorum secundorum, spatium quattuor minutis secundis percurrendam erit $4 : 60 = 16 : \frac{16 \times 60}{4} = 240$. Vice versa si tempore secundorum quattuor corpus percurrat 240 pe-

des; tempus, quo percurritur spatium pedum 135, erit $\sqrt{240}$; $4 = \sqrt{135} = \frac{4 \cdot \sqrt{135}}{\sqrt{240}}$

$$= \sqrt{\frac{16.135}{240}} = \sqrt{9} = 3.$$

Schol. At observandum est, demonstratam accelerationis legem valere dumtaxat in vacuo, sublata aëris resistentia, seclusisque aliis quibuslibet impedimentis. Attamen si experimenta fiant in globis, qui pondus satis magnum sub exiguo volumine continent, demonstratam accelerationis legem satis accurate servat globorum illorum descensus. Hac lege descendunt globi plumbei in angustum volumen redacti. At si iidem globi in sphaeram cavam magnae diametri extenderentur, iam turbaretur maxime lex illa; immo eo tenuitatis reduci posset globus, ut aëri mollioris plumae instar innataret. At de aëris fluidorumque resistentia sermo erit deinceps. Neque etiam heic consideramus gravitatem in magnis a terra distantiis. Hanc enim in ratione distantiarum duplicata decrescere iam demonstravimus. Verum quum in distantiis a terra mille, et mille ducentarum hexapedarum gravitatem constantem demonstrent experimenta; talem gravitatis legem nunc explicasse satis sit. Haec autem gravitatis doctrina debetur Galilaeo, qui motus uniformiter accelerati leges

Fig. primus omnium invenit atque demonſtravit.

Ex demonſtratis facile comparantur inter ſe corporum deſcenſus per diverſa plana inclinata.

Prob. Data altitvdine plani eivsqve longitvdine invenire spativm percvrrendvm a corpore descendente per
22. planvm *AD* eodem tempore, qvo vi absolvta descendit per plani altitvdinem *AB*.

„Quum ſpatia eodem tempore deſcripta viribus diverſis, abſoluta et relativa, quae ſingulae ſunt conſtantes, ſint ut vires ipſae; erit ſpatium *AB* ad ſpatium eodem tempore percurſum per *AD*, uti vis abſoluta ad relativam, ſeu uti *AD* ad *AB*. Quare ad *AD* et *AB* quaeratur in linea *AD* tertia proportionalis, quae erit ſpatium quaeſitum. Ducatur igitur ex puncto *B* ad *AD* perpendicularis *BF*; erit linea intercepta *AF* tertia proportionalis quaeſita, adeoque et ipſum ſpatium quaeſitum.“

Coroll. I. „Igitur univerſim ſi ex angulo recto *B* in longitudines planorum *AD*, *AE*, *AM* ducantur normales *BF*, *BK*, *BL*; corpora per diverſa illa plana deſcendentia, eodem tempore pervenient ad puncta *F*, *K*, *L*, quo illa eamdem altitudinem *AB* motu verticali percurriſſent.“

Coroll. II. Inde autem ſtatim patet, aequalia eſſe in circulo deſcenſuum tempora per

chordam quamlibet, et per diametrum verticalem, ac proinde aequalia descensuum tempora per chordas singulas.

Et quidem quum angulus *F* sit rectus, per puncta tria *A*, *F*, *B* describi poterit circulus, cuius diameter *AB*, chordae autem erunt *AF*, *BF*, ac proinde diameter verticalis et chorda *AF* vel *BF* eodem tempore describentur. Haec autem ratiocinatio valet in circumferentiae puncto quolibet, quum angulus semidiametro insistens sit nempe rectus. Quare chordae singulae eodem tempore percurruntur.

Prop. II. TEMPVS, QVO CORPVS DESCENDIT EX *A* IN *D*, EST AD TEMPVS, QVO CADIT EX ALTITVDINE PERPENDICVLARI *AB*, VT *AD* AD *AB*.

Nam ob motum uniformiter acceleratum, *AD* est ad *AF*, ut quadratum temporis per *AD* ad quadratum temporis per *AF* vel per *AB*. *Sed* AD *est ad* AB, *ut* AB *ad* AF, *et* $AD^2 : AB^2 = AD : AF$. *In qualibet enim progressione geometrica primus terminus est ad tertium, ut quadratum primi ad quadratum secundi. Igitur quum quadratum temporis per* AD *sit ad quadratum temporis per* AF; *uti* AD *ad* AF; *erit etiam uti* AD^2 *ad* AB^2; *ac proinde tempus per* AD *ad tempus per* AF *seu per* AB, *ut* AD *ad* AB.

Prop. III. TEMPORA DESCENSVVM PER PLANA QVOLIBET INCLINATA EIVSDEM ALTITVDINIS SVNT INTER SE, VT PLANORVM LONGITVDINES.

Nam sit tempus per AE = T, *tempus per* AD = t, *tempus per* AB = P. *Erit* T *s* P = AE : AB, *seu* T : AE = P : AB. *Etiam* t : P = AD : AB *seu* t : AD = P : AB. *Igitur erit* T : AE = t : AD, *seu* T : t = AE : AD.

Prop. IV. *VELOCITAS IN DESCENSV PER PLANVM INCLINATVM ADQVISITA EST AD VELOCITATEM EODEM TEMPORE ADQVISITAM DESCENSV PER PLANI ALTITVDINEM, VT ALTITVDO AD LONGITVDINEM.*

Quum enim singulae vires et absoluta et relativa sint constantes; celeritates ab iis genitae erunt, uti vires et tempus simul. Si igitur tempus ponitur idem, erunt celeritates uti vires; ideoque erit velocitas corporis in descensu per planum adquisita ad velocitatem corporis eodem tempore descendentis per altitudinem, ut vis relativa ad absolutam, seu ut altitudo plani ad longitudinem.

Coroll. *Quum igitur tempus per* AF *et*

AB *sit idem, erit velocitas corporis in* B *ad velocitatem corporis descendentis per planum in* F, *ut* AD *ad* AB, *seu ut* AB *ad* AF.

Prop. v. *SI CORPVS DESCENDAT PER PLANA QVOTLIBET INCLINATA* AD, AM *EIVSDEM ALTITVDINIS; VELOCITATES IN PVNCTIS* M *ET* D *ADQVISITAE, AEQVALES SVNT INTER SE, ET AEQVALES ETIAM VELOCITATI ADQVISITAE IN DESCENSV PERPENDICVLARI PER* AB.

Etenim velocitas corporis in B *est ad velocitatem corporis in* F *ut* AD : AB = AB : AF (coroll. praeced.). *Praeterea quadratum velocitatis in* F *est ad quadratum velocitatis in* D *ut* AF *ad* AD, *seu ut* AD^2 *ad* AB^2, *quum* AD, AB, AF *sint continuo proportionales. Igitur velocitas in* D *est ad velocitatem in* F, *ut* AD *ad* AB, *seu ut* AB *ad* AF. *Proinde velocitates in punctis* D *et* B *aequales erunt, quum relate ad velocitatem in* F *eamdem rationem habeant.*

Simili ratiocinatione velocitas in *M* aequalis demonstratur velocitati in *B*, ac proinde et velocitati in *D*, atque demonstratio valet de alio quolibet planorum numero. His sex propositionibus comprehendimus praecipuas corporum per plana inclinata descendentium leges, eas scilicet, quae ad sequentem articu-

Fig. lum intelligendum necessariae omnino sunt.

ARTICVLVS III.

De motu curvilineo.

I.

Demonstratum est iam, ubi virium compositionem et resolutionem explicavimus, nullam curvam vi unica describi posse, sed requiri saltem vires duas diversae naturae, quae scilicet rationem perpetuo variabilem inter se habeant. Evidens est, infinitum a geometris considerari posse virium ordinem, ac proinde et curvas numero infinitas. At physicis considerare satis est illas virium rationes, quae in rerum natura generatim obtinent. Itaque duas in hoc articulo distinguemus motuum species. Alii sunt motus *liberi*, corporum scilicet, quae semel mota sibi deinde libere permittuntur; alii autem sunt motus *non liberi*, corporum nempe, quae impedimento aliquo retinentur. Ad primam motuum speciem pertinent corporum proiectilium motus; ad alteram autem pertinent motus pendulorum. De hac duplici motus specie ex ordine tractabimus, praemisso principio, ex quo universa pendet curvilineorum motuum doctrina.

24. Consideretur latus infinitesimum curvae AB, per quod labatur corpus B velocitate

qualibet finita expressa per BC *. Iam ubi corpus pervenit in C, viam flectit per CD ita, ut producto latere DC, angulus externus BCM sit infinite parvus. Potest enim curva quaelibet considerari tamquam composita ex planis inclinatis numero infinitis et infinite parvis, quorum proinde inclinatio debet esse infinite parva, ut planorum inclinatorum series abeat in curvam continuam. Iam vero latus CD se habet tamquam obstaculum corporis motum secundum directionem BC retardans. Quare velocitas per BC, quae finita est, resolvi debet in velocitates duas, unam secundum directionem BN vel CM lateri CD parallelam, et alteram BM vel NC perpendicularem ad CD **. Sola velocitate finita expressa per BN corpus describit latus CD eodem tempore, quo describeret latus CD, ideoque aequales sunt CD et BN mo-

* *Velocitatem corporis per spatium infinitesimum currentis finitam esse, nemo non intelligit. Quum enim spatium sit uti productum ex tempore in velocitatem, si velocitas finita ducatur in tempusculum infinitesimum, erit spatium infinitesimum* (schol. ad theor. IV. cap. IV. sect. I. geom.).

** *Quamvis latus* BC *exhibens spatium, repraesentet latus infinitesimum; tamen si velocitatem finitam nunc repraesentet, considerari debet ut finitum.*

tu uniformi eodem tempore percursae. Quae quidem omnia manifesta sunt, si revocentur in memoriam, quae de virium compositione et resolutione demonstrata sunt. Porro in hac demonstratione ponitur, abesse vim omnem elasticam et resistentiam quamlibet. Est autem velocitas expressa per *NC* vel *BM* quantitas infinitesima primi ordinis, quum sit sinus anguli infinitesimi *BCM*, cuius radius est *BC* exprimens vim finitam *. Velocitas autem *NC* tota consumitur in premendo latere *CD*, nihilque confert ad velocitatem per curvam. Igitur velocitas corporis *B* per latus *CD* est ad illius velocitatem per latus *BC* ut *BN* ad *BC*. Iam vero ex *B* radio *BN* describatur arcus *NI*, erit $BI = BN$, ac proinde *CI* exhibebit velocitatem amissam. Sed arcus *NI* considerari potest tamquam recta infinite parva ex angulo recto *N* in hypothenusam *BC* perpendiculariter demissa; ergo *NC* est media proportionalis inter *BC* et *CI*; sed *CB* est quantitas finita; *NC* infinitesima primi ordinis; ergo *CI* est infinitesima secundi ordinis, ac proinde.

Prop. I. CORPVS CVRVAM DESCRIBENS EX LATERE INFINITESIMO IN ALIVD CONTIGVVM TRANSIENS, NON AMITTIT NISI

* *Vide geom. adnot. ad schol. theor.* III. *cap.* II. *sect.* I.

VELOCITATIS PARTEM INFINITESIMAM ORDINIS SECVNDI, AC PROINDE PER FINITVM CVRVAE ARCVM DESCENDENS AMITTET DVMTAXAT VELOCITATIS PARTEM INFINITESIMAM ORDINIS PRIMI; HOC EST, NVLLAM. Fig.

Atque hoc est universaliſsimum curvilinei motus principium. Iam primam motuum speciem consideremus.

Ex praealti montis vertice explosus intelligatur globus missilis secundum directionem horizontalem. Alia quaelibet directio considerari potest, sed directionem hanc omnium simplicissimam et commodissimam nunc adhiberi satis sit. Iam si vis globo missili impressa fingatur infinite parva, vi gravitatis in terram globus perpendiculariter recideret; si autem vis impressa ponatur infinite magna, secundum directionem horizontalem globus perpetuo movebitur. Hae sunt duae extremae hypotheses, inter quas infiniti alii casus esse possunt, sed eos dumtaxat exponemus, qui ad physicam pertinent.

Casus 1. Globus missilis proiiciatur per rectam horizontalem *AB*, et interea vi gravitatis constanti perpendiculariter urgeatur secundum directionem *AR*. Iam recta *AB* divisa intelligatur in partes innumeras aequales, ut *AE*, vi semel impressa temporibus aequalibus descriptus: rectae illae repraesentare poterunt 25.

tempora. Sunt enim tempora inter se, ut spatia motu uniformi descripta. Si autem ad singula divisionum puncta ducantur rectae ad horizontem perpendiculares, ut QE ita, ut rectae illae, sint ut quadrata rectarum AE; spatia singulis temporibus motu uniformiter accelerato descripta per easdem rectas exhibentur. Itaque corpus motu composito describet diagonalem virium AE, EQ, cuius haec erit natura, ut nempe rectae EQ vel AH semper sint, ut quadrata rectarum AE vel QH, ductis scilicet AE, HQ, et AH, EQ parallelis; sed haec est natura curvae, quam *parabolam apollonianam* vocant geometrae, ut nempe *abscissae* semper sint ut quadrata *ordinatarum*, ergo gravia proiecta in hac gravitatis lege parabolam describunt. Evidens autem est, eamdem manere demonstrationem, etiam si proiectionis directio fuerit ab horizonte utcumque obliqua. Tota enim demonstratio pendet ex duorum motuum compositione, quorum unus est uniformis, alter autem uniformiter acceleratus. Porro quaecumque sit proiectionis ad horizontem inclinatio, eadem manet motuum illorum natura, ac proinde et eadem natura curvae.

Casus II. Luna revolvitur circa terram, ideoque globi missilis instar proiecta intelligi potest secundum directionem tangentis orbitae, et interim vi centripeta tendens in terram. Verum in primo casu ob exiguas a tel-

lure distantias gravitatem tamquam constantem fingere, illiusque directiones veluti parallelas habere licet, quae quidem hypothesis ad corpora coelestia transferri non potest; quum ob magnas distantias neque constantem gravitatem neque illius directiones veluti parallelas considerare liceat. Iam evidens est, globum secundum telluris tangentem minori velocitate emissum describere arcum minorem, maiore autem velocitate arcum maiorem, atque aucta adhuc velocitate longius pergere ita, ut praetergredi possit totum telluris ambitum, et ad montem, unde proiectus fuerat, redire. Fingamus iam, corpora quaelibet de regionibus altioribus proiici, et ad terram vel solem aut quodlibet punctum vi centripeta tendere. Pro varia corporum velocitate, et vi gravitatis describentur arcus vel concentrici vel excentrici, atque in suis orbitis pergent corpora ad modum planetarum per coelos vagari. Sed haec breviter adnotata sint. De hoc argumento iam aliqua diximus attractionis doctrinam explicantes, atque rursus dicendi recurret locus in astronomia. De motu pendulorum iam paullo fusius disserendum.

Defin. I. Pendulum vel *simplex* est vel *compositum*. Pendulum simplex appellatur filum e puncto aliquo suspensum, quod tamquam inflexibile et gravitatis expers consideratur, altera autem extremitate pondere onustum. Si

Fig. filum plura habeat adnexa pondera, pendulum compositum appellatur.

Defin. II. Alternus itus penduli, qui de-
26. scensum ex *B* ad punctum verticale *P*, simulque adscensum ex *P* usque ad *b* continet, dicitur penduli *oscillatio* aut *vibratio*. Solus vero descensus ex quavis altitudine *B* ad punctum verticale *P*, vel solus adscensus ab hoc puncto ad alteram altitudinem *b*, vocatur *semioscillatio* aut *semivibratio*.

Defin. III. Si autem pendula duo suas vibrationes eodem tempore absolvant, pendula illa dicuntur *isochrona*. Si pendulum aliquod simplex *CP* in linea verticali constituatur, in puncto infimo *P* quiescit, ideoque punctum illud vocatur punctum *quietis*. At si pendulum attollatur ad punctum *A*, et deinde sibi permittatur, motu accelerato relabetur in *P*.

Schol. Et quidem penduli motum consideremus in puncto aliquo *N*, atque ponderis gravitas absoluta repraesentetur per *NG*. Haec resolvi poterit in vires *NH*, *NI*, quarum prima quum tota dirigatur contra punctum suspensionis *C*, ipsius puncti resistentia omnino exstinguitur; altera autem, quae est secundum directionem tangentis, exprimit gravitatem relativam, atque hac vi corpus motu accelerato descendit ad punctum *P*, ubi vis *NI* omnino evanescit. In hoc tamen puncto quie-

scere non potest pendulum; sed per vim Fig.
inertiae adquisitam servans velocitatem, adscendit versus K ita, ut aequales sint arcus AP, PK descendendo et adscendendo descripti, atque etiam aequalia descensus et adscensus tempora. Verum dum corpus ex P versus K adscendit, perpetuo agit vis relativa gravitatis secundum directionem oppositam ni, ac proinde in puncto b exstinguit omnes velocitatis gradus adquisitos. Quare corpus propria gravitate relabitur, non secus, ac ex puncto A primum descendit. Haec autem omnia manifesta sunt ex articulo praecedenti et ex numero primo articuli huius.

Prop. II. TEMPORA DESCENSVVM PER CVRVAS SIMILES, ET AD HORIZONTEM SIMILITER INCLINATAS, SVNT IN RATIONE SVBDVPLICATA LATERVM HOMOLOGORVM.

Etenim latera minima HG, GF, FD, 27.
itemque hg, gf, fd exhibeant infinitesimas curvarum partes similes, et ad horizontem similiter inclinatas. Iam tempus per HG est ad tempus per hg; ut $\sqrt{GH}$ ad $\sqrt{hg}$. Similiter tempus per GF est ad tempus per gf, ut $\sqrt{FG}$ ad $\sqrt{gf}$ *. Sed (*per hypothesim*) HG:

* *Nam velocitates in punctis* G *et* g *eaedem sunt, quas adquisivissent corpora*

Fig. $hg = GF : gf$. Ergo $\sqrt{HG} : \sqrt{hg} = \sqrt{GF} : \sqrt{gf}$. Ac proinde tempus per GF est ad tempus per gf, ut $\sqrt{HG}$; $\sqrt{hg}$. Simili ratione tempus per FD est ad tempus per fd, ut $\sqrt{HG}$; $\sqrt{hg}$. ergo tempus totum per $GH + GF + FD$ est ad tempus totum per $hg + gf + fd$, ut $\sqrt{HG} : \sqrt{hg} = \sqrt{GF} : \sqrt{gf} = \sqrt{FD} : \sqrt{fd} = \sqrt{KE} : \sqrt{ke}$, hoc est in ratione ſubduplicata laterum homologorum. Inde autem pendet univerſa pendulorum per circulares arcus excurrentium doctrina.

Prop. III. *Velocitates pendvlorvm arcvs circvlares* KB , BD *describentivm, svnt inter se in infimo pvncto* B , *vt svbtensae* KB , DB *eorvmdem arcvvm.*

28.

descendentia ex I *et* i *per plana* IG , ig. *Jam vero tempus per* IF *est ad tempus per* if , *ut* $\sqrt{IF}$ *ad* $\sqrt{if}$; *ſed tempus per* IG *est ad tempus per* ig , *ut* $\sqrt{IG}$ *ad* $\sqrt{ig}$; *ergo tempus per* GF *est ad tempus per* gf, *ut* $\sqrt{GF}$ *ad* $\sqrt{gf}$. *Simili ratiocinatione conficitur , tempus per* FD *eſſe ad tempus per* fd , *ut* $\sqrt{FD}$ *ad* $\sqrt{fd}$.

Sit velocitas, quam pendulum in descensu per arcum KDB *adquirit in infimo puncto* B $=$ V; *velocitas, quam pendulum descendens per arcum* DB *adquirit in infimo puncto* B $=$ v; *et velocitas quam corpus adquireret in eodem puncto descensu perpendiculari per* AB $=$ U. *Ducantur ex punctis* K *et* D *ad* AB *perpendiculares* KF, DG. *Erit velocitas penduli in descensu per arcum* KDB *adquisita aequalis velocitati, quam corpus adquireret cadendo ex altitudine* FB; *adeoque* $V : U = \sqrt{FB} : \sqrt{AB}$, *et* $V^2 : U^2 = FB : AB$. *Pariter velocitas penduli descendentis per arcum* DB *in infimo puncto* B *aequalis est velocitati, quam adquireret cadendo ex altitudine* GB; *adeoque* $v : U = \sqrt{GB} : \sqrt{AB}$, *et* $v^2 : U^2 = GB : AB$. *Quum* FB, KB, AB, *et* GB, DB, AB, *sint continuo proportionales, erit* $FB : AB = FB^2 : KB^2 = KB^2 : AB^2$, *atque etiam* $GB : AB = GB^2 : DB^2 = DB^2 : AB^2$. *Proinde erit* $V^2 : U^2 = KB^2 : AB^2$, *et* $v^2 : U^2 = DB^2 : AB^2$. *Seu* $V^2 : KB^2 = U^2 : AB^2$, *et* $v^2 : DB^2 = U^2 : AB^2$. *Igitur* $V^2 : v^2 = KB^2 : DB^2$, *adeoque* $V : v = KB : ZB$. Quae quidem proprietas circuli eximiae est utilitatis, praesertim ubi ad experientiam revocandae sunt conflictuum leges in proximo articulo demonstrandae.

Prop. IV. SI PENDVLA DVO ARCVS SIMILES DESCRIBANT, ERVNT VIBRATIONVM TEMPORA IN RATIONE SVBDVPLICATA LONGITVDINVM PENDVLORVM.

Pendula enim in ea hypotheſi ſunt corpora deſcendentia per curvas ſimiles et ſimiliter poſitas; adeoque tempora ſemivibrationum ſunt in ratione ſubduplicata laterum homologorum (prop. II.). *Latera autem homologa ſunt arcus ſimiles, qui ſunt, uti radii; radii autem ſunt pendulorum longitudines; igitur ſemivibrationum durationes erunt, uti pendulorum longitudines. Sed tempora vibrationum ſunt dupla; proinde in eadem ratione erunt vibrationum durationes. Hoc eſt, ſi longitudo unius penduli ſit* $= L$, *duratio ſemivibrationis* $= D$; *alterius vero penduli longitudo* $= l$, *duratio ſemivibrationis* $= d$; *erit* $D : d = \surd L : \surd l$. *Et quum duratio integrae vibrationis dupla, erit* $2D : d = \surd L : \surd l$, *ſeu ſi tempora vibrationum dicantur* T *et* t, *erit* $T : t = \surd L : \surd l$. Sed numerus vibrationum eo maior eſt dato tempore, quo minus eſt vibrationis unius tempus ſeu duratio. Igitur numeri vibrationum ſunt in ratione ſubduplicata inverſa longitudinum pendulorum. *Hoc eſt, ſi numerus vibrationum dato tempore confectarum primi penduli ſit* $= N$, *alterius*

vero = n; *erit* $N : n = \frac{1}{D} : \frac{1}{d} = \frac{1}{\surd L} : \frac{1}{\surd l}$.
Quare datis duorum pendulorum longitudinibus, datoque vibrationum numero tempore aliquo ab alterutro pendulo peractarum, invenietur numerus vibrationum eodem dato tempore ab altero pendulo confectarum, dicendo: longitudo penduli, cuius vibrationes quaeruntur, est ad longitudinem penduli alterius, ut quadratum numeri vibrationum dati ad quadratum numeri vibrationum quaesiti. *Nempe sit numerus vibrationum quaesitus* = x *erit*: $N : x = \frac{1}{\surd L} : \frac{1}{\surd l}$; *et* $x : N = \surd L : \surd l$; *adeoque* $x = \frac{N\surd L}{\surd l}$. Et vice versa invenietur penduli longitudo talis, ut datum quemlibet vibrationum numerum dato tempore perficiat.

Prop. v. SI PENDVLA DVO LONGITVDINIS DIVERSAE FVERINT ISOCHRONA, ERVNT VIRES GRAVITATIS ACCELERATRICES, VTI PENDVLORVM LONGITVDINES.

Sunt enim vires constantes, ut spatia iisdem temporibus descripta. Spatia autem in hoc casu sunt similes pendulorum arcus, qui

proinde sunt, ut longitudines pendulorum; quare et vires gravitatis in eadem sunt longitudinum ratione. Quod quidem maxime valet ad definiendum gravitatis incrementum vel decrementum in variis terrae locis, ut deinde explicabimus.

Schol. Hactenus consideravimus pendulum simplex, quale nullum exsistere potest in rerum natura. Nulla enim est virga, quae gravitate omni careat, ac proinde pendula omnia sunt composita. Rem breviter exponemus, quantum illius difficultas patitur. Si bina pondera filo suspensa in diversa a puncto suspensionis distantia suas oscillationes peragant, virgaque ipsa concipiatur inflexibilis, sine pondere et sine vi inertiae; pondus, quod puncto suspensionis propius est, suas oscillationes citius absolvere debet; contra autem tardius, quo a puncto suspensionis remotius est, in ratione scilicet subduplicata distantiarum. Id quidem contingeret, si pondera oscillationes suas seorsum peragerent. Verum quia penduli virga omnino rigida et inflexibilis ponitur, suas oscillationes eodem tempore pondera absolvent, atque ita componentur inter se velociores et tardiores ponderum motus, ut medio quodam tempore suas vibrationes perficere debeant. Iam si inveniatur punctum aliquod, in quod bina pondera collecta suas vibrationes eodem tempore perficerent, illud punctum dicitur *centrum*

oscillationis, eiusque a puncto suspensionis distantia erit longitudo penduli simplicis pendulo composito isochroni. Quod autem diximus de binis ponderibus, idem quoque intelligi potest de alio quolibet ponderum numero, ac proinde et de infinitis ponduſculis per virgam penduli dispersis, in quo quidem casu gravitatis fili ratio habetur. At si filum sit subtilissimum ita, ut illius pondus cum ipso globi appensi pondere comparatum sit valde exiguum, et praeterea si valde exigua sit globi diameter cum fili longitudine comparata; iam pendulum velut simplex considerari potest. Quia vero sublimior geometria exhibet generales formulas, quarum ope invenitur centrum oscillationis, ideoque pendulum compositum ad simplex reducitur; satis nobis fuit penduli simplicis doctrinam explicasse. Alia autem plurima, quae in hoc articulo brevius diximus, ex sequenti conclusione magis fient manifesta.

CONCLVSIO.

GRAVITATIS TERRESTRIS INAEQVALITATEM DEMONSTRANT ACCVRATISSIME INSTITVTA PENDVLORVM EXPERIMENTA.

Demonst. Si observetur longitudo penduli isochroni in duobus locis, erunt vires in iis locis, ut pendulorum longitudines (*ex*

antea demonstratis). Licebit ergo gravitatis incrementum perspicere, diligenter observata in variis terrae locis penduli isochroni longitudine. Quanta autem in capiendis huiusmodi experimentis adhiberi debeat diligentia, repetendum est *ex monumentis parisiensibus anno 1735*. Nihil enim accuratius ac scrupulosius tradi potest, quam quod ibidem hac in re praescripsit vir clarissimus Dominus de Mairan. Haec autem praecipue curanda monet. I.° Accurata habenda est mensura pedis parisiensis vel altera quaelibet mensura, cuius ad pedem parisiensem nota sit ratio ita, ut decima et si fieri potest, centesima lineae parte non aberret. II.° Parari debet globus exacte rotundus, diametro circiter unius pollicis, ex materia bene compacta. III.° Adhibendum est filum flexibile, nec ita complicatum, ut oscillationes laterales mutet in conicas, quas quidem diligenter evitari, multis de causis expedit. Optimum omnium et iam fere ab omnibus adhiberi solitum, est filum, quod paratur ex foliis *aloes*. Fili autem pondus si fuerit millesima pars ponderis globi, in pendulo pedum trium, linearum octo, attollit centrum oscillationis una quartadecima parte lineae unius: in aliis casibus ea elevatio erit quam proxime, ut longitudo fili directe, et ut pondus globi inverse, quod demonstrat Vir praelaudatus. IV.° Summa utendum est diligentia in capienda distantia pun-

cti suspensionis a centro globi vel ab immo globi puncto. Habita autem distantia puncti suspensionis a centro, si ei addantur $\frac{2}{5}$ tertiae proportionalis ad ipsam et globi semidiametrum; habebitur penduli longitudo. v.° Demum paratum sit oportet horologium accuratum, quod dirigatur per appulsum stellae alicuius ad telescopium immotum, vel solis ad lineam meridianam. Oscillationes autem maxima cura et sine ullo erroris periculo numerandae sunt.

Tanta autem adhibita diligentia, quae in re subtilissima omnino quidem necessaria est, iam certo definitum habemus, penduli isochroni mensuram breviorem fieri pergendo a polis ad aequatorem, contra vero longiorem ab aequatore ad polos. Ita ergo comperta est gravitatis inaequalitas in diversis terrae locis, ut nemo sit, qui de ea dubitet. Non defuerunt quidem doctissimi etiam viri, qui observationibus per Europam institutis, gravitatem ubique aequalem se invenisse, profiterentur. Verum quod minus feliciter successerit observatio, summo consensu nunc tribuunt physici iis methodis, quae tum in usu erant minus perfectae et perpolitae ita, ut exiguum gravitatis discrimen tam exiguis locorum intervallis debitum deprehendere nequaquam licuerit. Hinc observationes multo accuratiores et accuratioribus instrumentis institutae sunt in

plurimis et admodum dissitis terrae locis. Omnium autem observationum fide certo constat gravitatis inaequalitas. Heic autem longius esset describere varias pendulorum longitudines, quarum tabulas videre licet in eximiis operibus, quae de telluris figura paucis abhinc annis in lucem prodiere.

Quamvis ad determinandam gravitatis inaequalitatem solius penduli isochroni mentionem fecerimus; evidens tamen est, pari successu adhiberi posse pendulum non isochronum. Etenim ex doctrina motus uniformiter accelerati in praecedenti articulo explicata, spatia crescunt ut quadrata temporum, eadem manente vi acceleratrice. Si autem vires acceleratrices diversae fuerint, seorsum tamen consideratae constantes maneant; quo maior est vis acceleratrix, eo maius est spatium dato tempore percursum, ac proinde spatia sunt, ut quadrata temporum et vires acceleratrices coniunctim, seu $S = VT^2$; ideoque vires acceleratrices sunt, ut spatia descripta directe, et quadrata temporum inverse, seu $V = \frac{S}{T^2}$. Iam vero in casu pendulorum spatia sunt, ut longitudines pendulorum; erunt ergo vires gravitatis, ut longitudines pendulorum directe, et quadrata temporum oscillationum inverse, hoc est $V : v = \frac{L}{T^2} : \frac{l}{t^2}$.

 Fig.

Vnde eruitur $T : t = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{V}} : \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{v}}$. *Quae quidem analogia comparetur cum superioribus analogiis* (pp. IV. V.) Igitur manente eadem penduli longitudine, vires gravitatis sunt, ut quadrata temporum oscillationum reciproce, hoc est $V : v = \frac{1}{T^2} : \frac{1}{t^2}$. Itaque patet, eiusdem penduli ope gravitatis comparationem in diversis terrae locis institui posse. Tanta enim diligentia numerus oscillationum dato tempore determinatur, ut ne dimidiae quidem oscillationis error committi possit. Hac methodo gravitatis inaequalitas primum detecta est a Richero, cuius observationes iam antea commemoravimus.

Vt tota haec quaestio maximi sane momenti in bono lumine collocetur, meminisse oportet, duplicem considerari posse gravitatem: aliam nempe *primitivam* nulla vi centrifuga perturbatam; aliam autem vi centrifuga imminutam, quam gravitatem *actualem* appellare licet. Totam rem breviter explicabimus, ut facere solent, qui telluris circa axem rotationem admittunt. Sit *AB* diameter aequatoris, cuius poli *P*, *p*, sitque *DE* 29.
semidiameter paralleli cuiusvis. Quoniam in circulari motu vis centrifuga dirigitur ad partes circuli descripti centro oppositas, in ae-

quatore A dirigetur ad partes oppositas centro terrae C per CA; in parallelo D ad partes oppositas centro paralleli E per ED. Iam vero gravitas ubique dirigitur ad centrum terrae C, saltem quod ad sensum, nimirum in A per AC, in D per DC. Praeterea directio CA est penitus contraria directioni AC. At patet ex motuum compositione et resolutione, directionem vis centrifugae per ED referendam esse ad directionem vis gravitatis per CD. Nempe vim centrifugam in D exprimat recta DO, haec resolvatur in ON ipsi CD normalem, et in DN secundum directionem ipsius CD. Haec sola pars vis centrifugae opponitur directioni gravitatis in D. Iam facile invenitur ratio vis centrifugae in D secundum directionem DN ad vim centrifugam in A. Etenim exprimat AI vim centrifugam in A, erit (*ex demonstratis de vi centrifuga*) AI ad DO, ut AC vel DC ad DE. Praeterea ob triangulorum DCE, ODN similitudinem, erit iterum CD ad DE, ut DO ad DN, ideoque compositis rationibus CA^2 ad DE^2, ut AI ad DN *. Ex hac demonstratione aestimari potest effectus vis centrifugae in quolibet terrae loco. Patet autem,

* *Nempe* $AI : DO = DC : DE$, *atque* $DO : DN = DC : DE$. *Compositis rationibus erit* $AI \times DO : DO \times DN = DC^2 : DE^2$, *seu* $AI : DN = DC^2 : DE^2 = AC^2 : DE^2$.

vis centrifugae effectum talem esse, ut gravitati primitivae minus detrahat pergendo ab aequatore ad polos, et quidem duplici de causa; tum quia decrescit ipsa vis centrifuga, quae in polo evadit nulla, tum quia eius directio gravitatis directioni minus directe opponitur. Ex his etiam facile determinatur ratio vis centrifugae ad gravitatem primitivam. Si fingamus corporis alicuius sub aequatore gravitatem omnem sublatam, iam posito rotationis motu corpus illud per telluris tangentem elaberetur, ideoque minuti unius secundi intervallo supra ipsum telluris globum attolleretur tota illa altitudine, quae est inter tangentem et arcum minuti unius secundi tempore descriptum, quae quidem lineola tangente et arcu comprehensa ex elementis geometriae facile invenitur. Haec exprimet vim centrifugam sub aequatore. Addi autem debet spatio, quod corpora sub aequatore minuti unius secundi tempore libere descendendo percurrunt. Atque ita habebitur gravitas primitiva sub aequatore, quae proinde conferri poterit cum vi centrifuga data, atque ita dicendum de aliis quibuslibet terrae locis. Sed haec paucis indicasse sufficiat; convenientius enim explicabuntur, ubi de figura telluris. In hac conclusione solam gravitatis variationem demonstrandam suscepimus.

SOLVVNTVR OBIECTIONES.

Obiect. 1. Doctrina pendulorum hactenus explicata omnem excludit medii resistentiam. At certissimum est, pendula impedimentis plurimis obnoxia esse. Et quidem aëris resistentia maxime retardantur pendulorum motus: ipso suspensionis puncto mutuus fit attritus, atque hinc oritur aliud omnino inevitabile impedimentum. Itaque sic argumentari licet: gravitatis variationem non demonstrant experimenta illa, quae nulla sufficienti diligentia institui possunt; atqui ita se habent experimenta pendulorum in diversis terrae locis capta; ergo ex experimentis pendulorum non comprobatur inaequalitas gravitatis.

Resp. C. mai. N. min. Aëris aut mutui attritus impedimento tribui non potest differentia, quae in pendulorum longitudine observata est. Et quidem iisdem impedimentis adficiuntur pendula tum sub aequatore, tum versus polos. Neque est, quod dicant, aliqua fortasse de causa maiorem esse aëris resistentiam versus aequatorem, ac proinde et maiorem penduli retardationem. Et certe in tam exigua velocitate exigua omnino esse debet et fere nulla aëris resistentia, quae si quid agit, ubique eodem fere modo motum retardat, et potius minus sub aequatore ob minorem aëris densitatem, maiori scilicet ca-

lore vigente. Praeterea etiam diligentissimi viri, qui pendulorum longitudinem observarunt, nullam praetermisere diligentiam, ut penduli retardationem ex aëris resistentia oriundam cognoscerent, adhibitis quoque accuratissimis barometris, quae atmosphaerae variationem indicarent *. Sed tanta diligentia necessaria

* *In responsione ad obiectionem illud in primis negandum est: medium nempe sive densius sive rarius quidquam conferre ad minorem maioremve durationem singularum oscillationum. Neque etiam quidquam ad durationum diversitatem confert, quod globi pendulo appensi sint maioris vel minoris gravitatis specificae; v. g. globus metallicus vel ligneus. Maior densitas medii et minor gravitas specifica globi appensi efficere possunt, ut oscillationes per breviores arcus continuo excurrant. Ideoque post plurimas oscillationes discrimen in eo tantum consistit, quod oscillationes globi levioris seu in medio densiori oscillantis breviores evadunt, donec tandem omnino exstinguantur, durantibus interea oscillationibus alterius penduli. Ceterum quamdiu durant, etsi sint magis curtae idem tamen est durationis tempus cum longioribus globi ponderosioris, seu in medio rariori oscillantis, dummodo longitudo penduli et gravitas acceleratrix eaedem maneant.*

quidem fuit, ut accurate et ad amussim definiretur vera penduli longitudo, mediocris autem diligentia satis fuit, ut variatio penduli innotesceret. Tanta enim est, ut observationibus etiam sine maxima subtilitate institutis sese conspicuam praebeat. Praeterea omni caret verisimilitudine, observationes omnes in eumdem errorem perpetuo conspirare, quod nempe penduli isochroni longitudinem per gradus minorem faciant, pergendo a polis ad aequatorem. Porro in praesenti conclusione generatim dumtaxat agimus de gravitatis inaequalitate. Rem vero accuratius determinare pertinet ad geographiam, ubi telluris figuram investigabimus.

Obiect. 2. In pendulorum observationibus non apparet summus ille consensus, qui tamen ad fidem faciendam necessarius omnino est. Circumferuntur plurimae observationum tabulae, quae quidem a se invicem non parum discrepant. Immo Picardus per totam Galliam et Vranoburgi eamdem invenit penduli longitudinem. Vnde sic concludi potest: gravitatis variationem non demonstrant observationes illae, quas erroris suspectas reddit earum dissensus; atqui re vera ut plurimum inter se dissentiunt praedictae observationes, ergo inaequalitatem gravitatis non accurate demonstrant pendulorum observationes.

Resp. Dist. mai.: erroris suspectae sunt observationes, quod ad veram et accuratam pendulorum longitudinem transeat; quod ad

longitudinem penduli generatim consideratam, N.; quare distincta min. N. cons. Re quidem vera plurimos observationum catalogos inter se minime conspirantes exhibuerunt doctissimi viri, sed quamvis ob rei difficultatem in eadem non consentiant penduli longitudine; in id tamen conspirant omnes, ut in praecedenti responsione observavimus, quod nempe pendulum ostendant brevius sub aequatore, longius versus polos. Quod autem Coupletus eamdem in universa Gallia invenerit penduli longitudinem, referri debet nimis exiguae locorum distantiae, atque etiam instrumentis minus accuratis pro ea, quam tales observationes postulant, subtilitate. Dixi autem *transeat*: tanta enim diligentia his nuperrimis annis iterata fuerunt experimenta, ut miranda omnino sit tanta consensio. Tantillas enim habent differentias, quas nulla diligentissimorum virorum industria vitare potest.

Obiect. 3. Durissima quaeque metalla vi caloris extendi, frigore autem contrahi, certissimum est. Notissimum est physicis instrumentum, quod *pyrometrum* dicitur. Haec est illius structura. Constat ex lamella metallica, cuius extremitas una in denticulos desinit. Hi autem denticuli axis perpendicularis cavitatibus seu canaliculis inseruntur; axis autem rotae horizontalis dentes ingreditur. Subtus lamellam metallicam aptata sunt ellychnia, quae admoto igne flammam conci-

piunt. Rebus ita dispositis, lamella distenditur, illiusque proinde denticuli axis cavitates per vices subeunt, et eumdem axem convertunt; revolvi autem non potest axis, nisi moveatur quoque rota superior horizontalis huic contigua. Quare si centro rotae aptatus fuerit indiculus, qui circumferentiam in gradus, graduumque partes divisam libere percurrat, ipsam lamellae dilatationem ex graduum percursorum numero aestimare licebit. Tanta autem est dilatatio, ut circumferentiam integram indiculus aliquando describere videatur. Si vero ad calorem exstinguendum aqua lamellam perfundas, ad pristinum locum retrogrado motu redibit indiculus, ideoque et lamella iustum contractionis statum recuperabit. Eamdem dilatationem accuratissimis observationibus expertus est clarissimus de Mairan, soli, igni et aquae ebullienti expositis metallorum virgis. Igitur probabile est, caloris vi, sub zona torrida crevisse longitudinem penduli, quod iccirco lentius moveri debuit; idem vero pendulum Parisios translatum rursus contrahebatur. Vnde sic concluditur: gravitatis inaequalitati referri non debent experimenta illa, quae in alternam pendulorum dilatationem et contractionem refundi possunt; atqui re vera diverso aëris calori referri potest diversa penduli longitudo, ergo ex pendulorum observationibus non deducitur gravitatis inaequalitas.

Resp. N. min. Observatam penduli variationem caloris vi tribuendam non esse, indubitatum omnino est. Virga ferrea pedum sex aestivo soli meridiano diu exposita, experimentis diligenter institutis inventa est maior per duas tertias partes lineae, ideoque per decimam octavam partem pollicis parisiensis. Virga pedis unius ad ignem candefacta per dimidiam excrevit lineam. Primus calor ex sole aestivo meridiano conceptus satis quidem vehemens in virga penduli pedum trium induceret unam tertiam lineae partem. Alter autem calor vehementissimus, igne scilicet excitatus, lineae unius cum dimidia variationem exhiberet. At pendulum, quo utebantur diligentissimi viri, multo minorem calorem debuit concipere, nec igni expositum, nec solaribus radiis. Immo caloris effectus summa diligentia impediebatur, vel redacto conclavi, in quo experimenta instituebantur, ad calidioris loci temperiem, quod igne admoto et adhibito thermometro in Laponia praestitit dominus de Maupertuis, vel notando oscillationum discrimen singulis gradibus caloris debitum, quod thermometri ope diligenter perfecit Grahamus. Hac enim adhibita diligentia variatio calori debita a tota penduli inaequalitate tuto detrahebatur. His autem praesidiis exercitatissimi viri in plurimis locis plures observationes habuerant. Pelli in Laponia prope flumen Tornum inventa est

Fig. longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis pedum 3, linearum 9 $\frac{1}{100}$. Parisiis pedum 3, linearum 8 $\frac{67}{100}$, sub aequatore pedum 3, linearum 7 $\frac{21}{100}$. Hanc autem tantam differentiam vi caloris tribuendam non esse, ex hactenus dictis facile patet.

Obiect. 4. Quamvis gravitatem minorem sub aequatore ostendant pendulorum observationes; inde tamen minime colligi potest gravitatis inaequalitas, ab aequatore ad pollos certam servans legem. Etenim fingamus gravitatem, qualem requirit newtoniana hypothesis, in ratione reciproca duplicata distantiarum a singulis materiae particulis: fingatur quoque terra sphaera homogenea, ac dematur sub aequatore *B* sphaera materiae, cuius radius *BI* contineat
30. milliaria quattuor. Iam detrahetur in *B* pars circiter millesima gravitatis. Nam terrae semidiameter *CB* est milliarium circiter 4000, et attractio in sphaeram *CB* est ad attractionem in *BI*, ut *BC* ad *BI*, sive ut 1000 ad 1, quod antea demonstravimus*.

* *Sunt enim attractiones corporum in su-*

At in F nullum obſervari poterit decrementum gravitatis. Eſt enim attractio puncti F in ſphaeram IB, ad attractionem puncti B in eamdem, ut BI^2 ad FI^2, ſive proxime, ut IB^2 ad $2BC^2$ **, ſive, ut 16 ad 32000000. Nimirum decrementum gravitatis in F, erit $\frac{1}{2000000}$ decrementi in B, et $\frac{1}{2000000000}$ gravitatis totius Si iam ſphaera BI transferatur in F, eodem argumento ibi creſcet pars milleſima gravitatis, nihil in B: eritque differentia inter B et F pars quingenteſima gravitatis. Si dupla ſphaerae diameter adhibita fuiſſet, prodiiſſet differentia dupla, nimirum pars ducenteſima et quinquageſima quarta, qualis fere per obſervationes pendulorum invenitur. Quamvis autem gratis omnino fingatur, ſub aequatore in B exſiſtere cavernam ingentem, cuius diameter ſit milliarium octo, certum tamen eſt, multo minus materiae ſub aequatore, quam ſub polis contineri. Nam ob ingentem calo-

perficiebus ſphaerarum poſitorum in ratione directa radiorum ſuarum ſphaerarum.

** *Nam quadratum hypothenuſae aequale eſt quadratis cathetorum, et ſi catheti aequales ſint, duplo quadrato alterius catheti.*

rem perpetuum corpora omnia rariora sunt versus aequatorem; at versus polos perpetuis nivibus et glacie rigent omnia. Praeterea observationes pleraeque in America factae sunt in locis maritimis, immenso oceano cinctis, cuius et magna est profunditas et ingens extensio; reliquae in Europa observationes institutae sunt in locis a mari remotioribus et supra maris superficiem ita elatis, ut illa maior a centro distantia minus detrahat gravitati, quam addat tanta materiae quantitas late circumfusa. Ex his omnibus sic aliqui solent argumentari. Certum gravitatis incrementum vel decrementum non ostendunt inaequalitates illae, quae recensitis causis tribui possunt; atqui diversae materiae dispositioni in diversis terrae tractibus certo certius tribui debet gravitatis variatio; ergo nulla certa lex decrementi gravitatis a polis ad aequatorem statui potest.

Resp. transeat mai. et N. min. Ad maiorem dico *transeat*; in praesenti enim quaestione sermo est dumtaxat de gravitatis inaequalitate, non vero de huius inaequalitatis lege et causa; ac pro mero figmento certe haberi debent in locis quibusdam cavernae, in locis aliis montes. ¿Ecquis enim facile crediderit, per universam tellurem tali ordine montium cavernarumque seriem distributam fuisse, ut certis pendulorum legibus accurate respondeat? Et quidem observationes non tantum sub aequatore et prope polos, sed et-

iam in lociis aliis plurimis et longius a montibus dissitis fuerunt institutae. Tandem versus aequatorem eminent altissimi montes, quorum ea fuit vis attractiva, ut pendulum a perpendiculari directione septem secundorum intervallo dimovere potuerit, ut antea observavimus. Verum secundum obiectionis hypothesim tellus sub aequatore montibus eminere non debet, sed contra cavernis ingentibus hiare. Heic autem data iterum occasione de montium attractione pauca revocabimus, ex quibus intelligetur, altioribus quoque montibus exiguam omnino vim tribuendam esse, illosque minimam continere materiae quantitatem, si cum massa telluris conferantur. Ponamus montem tria milliaria altum, qualis est circiter altitudo montis *Chimboraco.* Hunc montem exhibeat sphaera D in superficie telluris, quam tangat recta CLD; erit gravitas in L in tellurem ad gravitatem in D in sphaeram, ut sphaerarum radii (*ex demonstratis*); gravitas autem in L in tellurem ad gravitatem in D in eamdem, in ratione reciproca duplicata distantiarum LC, DC a centro eiusdem. Quare ponendo $DC^2 : LC^2 = LC : DH$; recta DH exhibebit gravitatem in terram in puncto D, et completo rectangulo $ODHA$, dirigetur gravitas per DA ex motuum compositione. Iam vero in triangulo rectangulo DHA dicatur: ut DH est ad $HA = DO$, ita radius ad tangentem an- Fig. 31.

guli *HDA*. Quia autem data est semidiameter telluris, quae minor est milliariis parisiensibus 3940, ac proinde et ipsa *DH*; (*ex sup. anal.*) angulus *HDA* invenietur = 1′, 18″. Talis ergo esse deberet aberratio penduli prope montem *Chimboraco*; quae tamen aberratio per observationem prodiit dumtaxat 7″. Heic adferre placuit demonstrationem antea omissam, principiis necessariis nondum constitutis. Hinc patet, ingentes etiam montes minimam habere densitatem pro ratione voluminis. Quare certum est, montes illos cavitatibus seu cavernis hiare. Illae autem telluris inaequalitates, quae tantae nobis videntur, et minimae tamen sunt cum tota telluris massa comparatae, probabilissime referendae sunt in vehementiores aliquas telluris concussiones, quarum effectum ultra superiores telluris partes propagatum non fuisse verisimillimum est. Itaque ex his omnibus colligitur, ad explicandam gravitatis inaequalitatem sine ulla ratione fingi montes et hiatus certa lege per universam terram dispersos. Ceterum quamvis saepe dixerimus, gravitatis legem per observationes pendulorum heic a nobis non determinari; nemo tamen putet, id contrarium esse constitutae antea attractionis legi in ratione distantiarum duplicata decrescentis. Etenim hanc attractionis legem demonstravimus inter corpora coelestia magnis intervallis a se invicem remotissima, in quibus proinde di-

versam densitatem negligere licuit. Gravitatem terrestrem in eadem quoque ratione decrescere ostendimus, sed gravitatem consideravimus in eodem dumtaxat telluris loco; nullam vero rationem habuimus illarum inaequalitatum, quae ex varia telluris densitate aliisque causis originem habere possunt. Tandem inaequalitates illae nihil repugnant demonstratae attractionis legi, quum oriantur ex ipsa attractionis lege in ratione directa massarum et duplicata inversa distantiarum. Sed ut iam saepe monuimus, fusior explicatio ad alium locum pertinet, ubi de figura telluris,

Inst. I. Pendulorum observationes haberi non possunt, nisi facta comparatione cum horologii motu. At horologia constant ex variis partibus, quae singulae impedimentis plurimis adficiuntur: arido vel humido coelo magis vel minus lubricae fiunt rotae, modo velociores, modo tardiores. Hinc fit, ut pendulum horologii in longiores vel breviores arcus excurrat, ac proinde idem non servetur singularum oscillationum tempus. Tandem vitium aliud, quod in pendulo simplici iam notavimus, in horologiorum pendulis multo magis crescit ob partium multitudinem et varietatem, nempe pro varia coeli temperie mutantur, varieque extenduntur et contrahuntur plurimae horologiorum partes; hinc mutatur centri oscillationis situs. Ex his omnibus ita concludi potest: incertis causis, et

sine ulla lege variis tribui potest diversa penduli longitudo, si incertus omnino sit horologiorum usus, qüantum in re tam subtili desideratur; atqui re vera incertus est horologii eiusque partium usus; ergo ex observationibus pendulorum nihil certi confici potest pro diversitate gravitatis.

Resp. C. mai. N. min. Re quidem vera horologiorum partes singulae variis mutationibus sunt obnoxiae. At comparatione diligenter instituta inter horologii solisque aut stellarum motum, innotescere facile potest, an horologium errorem aliquem admittat. Praeterea ad vitandam mutationem ex coeli temperie oriundam adhiberi debent artificia, de quibus iam supra mentionem fecimus. His horologiorum incommodis plurima parata sunt remedia. Grahamus celeberrimus instrumentorum artifex utilissimum sane tantis malis remedium excogitavit. In extrema penduli virga suspendit tubum mercurio plenum ita, ut tamen in tubo spatioli aliquid superesset, per quod mercurius ipse caloris vi dilatatus cum virga intra tubum adscenderet, descendente interim tubo ipso, atque ita centrum oscillationis suo loco maneret. Est et alia eiusdem erroris corrigendi ratio. Suspenditur pondus diversorum mettallorum lamellis ita inter se connexis, ut dum altera lamella magis distenta ultra alteram itidem distentam pondusque deprimentem excurrit, ipsa pondus sur-

sum attollat, et priori altitudini restituat, immo etiam non nihil maiori ita, ut ipsius virgae centri oscillationis descensus compensetur, totiusque penduli centrum oscillationis suo perstet loco *. Neque heic praetermittendum est alium artificium non minus ingeniosum, quod paucis abhinc diebus excogitavit peritissimus horologiorum artifex parisiensis Lepautius. Accuratissimis observationibus notum sit oportet, quantum dilatetur virga metallica pro dato quolibet thermometri gradu; hos autem dilatationis gradus cepit Lepautius ex Bougeri et Ellicotii virorum diligentissimorum experimentis. Deinde curvam delineavit, cuius radii inaequales virgae dilatationibus semper forent proportionales ita, ut anguli, quos radii singuli cum ipso divisionis initio continent, semper crescant, ut gradus thermometri. Id vero obtineri posse, evidens est descripto circulo et in suos gradus diviso, non secus ac dividitur thermometrum, hoc est, in partes 40. Nam Parisiis intra hos limites consistit altitudo liquoris in thermometro. Patet autem, hanc curvam imitari spiralem, quam *archimedeam* a suo inventore dicunt geometrae. Tandem compertum est, partem centesimam lineae in dilatatione virgae per horas 24 id efficere, ut pendulum retardet minuto uno secundo. Iam si radii centesima parte lineae pro singulis divisionibus minuantur; manifestum est, pun-

ctum curvae, quod quadragesimae divisioni respondet, centro propius esse quadraginta centesimis partibus lineae seu duabus quintis lineae, quam sit ipsum curvae initium. Quae quum ita sint, in descriptam curvam flectatur lamella metallica, eaque sub ipsa horologii suspensione collocetur; aptata etiam a u, quae thermometri gradibus respondeat. Totum ergo negotium huc redit, ut pro tempore aliquo dato observetur gradus thermometri, curandumque, ut arcus eidem gradui respondeat. Hoc idem instrumentum alteri quoque graviori malo remedium adfert. Rotarum cardines in horologiis oleo imbui solent: olei autem particulae aestivo tempore vi caloris solutae fluunt, tempore autem hiberno frigoris vi constringuntur et indurescunt. Hinc liberiores vel difficiliores sunt oscillationes. Verum quum malum istud ex eadem causa pendeat, nempe, ex gradu thermometri, idem quoque adhibetur remedium, augenda nempe est radiorum inaequalitas. Igitur non solum minui debet spiralis radius centesima parte lineae seu quadragesima parte circumferentiae totius circuli, sed mulctari etiam debet quantitate huic alteri effectui debita et per observationes cognita *.

* *Quare duobus hisce asteriscis includuntur, ex novissima sua editione romana ab Auctore ipso expuncta fuere.*

DE CYCLOIDE.

Superest tandem, ut de vibrationum inaequalitate aliquid adiungam. Re quidem vera horologiorum pendula in breviores longioresque arcus variis de causis saepe excurrunt. Verum arcus illos licet inaequales iisdem quam proxime temporibus describi demonstrant geometrae. Quod ut intelligatur, brevis sermo haberi debet de celeberrima quadam curva, quam *cycloidem* appellant. Cyclois est curva linea, quam describit punctum aliquod in circuli circumferentia pro lubitu adsumtum, interea dum circulus totus super lineam rectam revolvitur. Huius curvae genesis repraesentari solet per imaginem clavi in rotae superficie defixi. Dum nempe rota per planum circumvolvitur, clavus in aëre cycloidem percurrit. De prima cycloidis inventione accerrime certatum est circa annum 1645 inter Torricellium et Robervalium, illo primam cycloidis considerationem tribuente in Italia Galilaeo, hoc autem in Gallia Mercenno nostro. Sed quidquid sit de illa concertatione, quae in rixas apertasque inimicitias deinde exarsit, solam rei utilitatem, minime vero gloriam considerabimus. Plurimas inter et quidem elegantissimas cycloidis proprietates unam prae aliis adferemus, quae ad praesentem casum pertinent. Si nempe cyclois

ita invertatur, ut crura sursum tendant, punctum autem infimum horizontem tangat; tum e quavis distantia demittatur grave per ipsam cycloidem, eodem omnino tempore per arcum utcumque magnum vel parvum descendet. Itaque patet, hanc cycloidis proprietatem ad pendulorum usum transferri posse. Si nempe efficiatur, ut virga penduli in cycloide suas vibrationes absolvat. Hac enim arte servatur temporis aequalitas, mutata utcumque arcuum descriptorum longitudine. Illud autem commodum sequenti artificio obtineri potest. Si curvae cuilibet ex eius parte convexa advolvatur filum, tum evolvatur ita, ut pars evoluta semper tensa maneat, punctum fili quodcumque curvam quamdam lineam delineabit motu illo per aërem. Curva, quam filum complectitur, dicitur *evoluta*; curva autem, quam filum in aëre describit, curva *evolutione genita* appellatur. Curva genita fere semper admodum diversa est ab evoluta. At ceteris proprietatibus cycloidis haec addenda est sane elegans. Si nempe a summo vertice cyclois evolvatur, se ipsam generat sibi prorsus aequalem ita, ut binae semicloides in situ erecto positae, et e parte convexa in ima sui parte sibi coniunctae integram cycloidem generent. Quamobrem si binae lamellae semicycloidales in ima parte convexae invertantur deorsum ita, ut ima pars evadat summa, et ex ipso lamellarum angu-

lo suspendatur filum, quod semicycloidis perimetro aequale sit, pondus imo filo suspensum oscillationes suas in cycloide peraget, isochronas prorsus; sive in ampliores arcus excurrant, sive brevioribus arcubus se contineant, tempore semper aequali. Hanc cycloidis proprietatem ad horologiorum usum primus omnium traduxit Hugenius. In horologiis vel pondus appensum vel lamina chalybea elastica per vim contorta, motum primae rotae imprimit, a qua in totam machinam derivat. Iam diu in usu erat id machinarum genus, sed Hugenius eidem machinae pendulum adiecit ita, ut cum illius oscillationibus celerioris rotae motus connecteretur, dentesque singuli post singulas oscillationes procurrerent. Verum iam diximus, a geometris demonstratum esse, descensus per arcus circuli minimos etiam inaequales esse quam proxime isochronos. Quare quum minimi sint circulorum arcus a pendulis descripti, tanta non est hac in re cycloidis utilitas. Praeterea in pendulis simplicibus sola gravitate sollicitatis valere quidem potest cycloidis usus; sed minus felici successu horologiis aptatur. Et quidem ad penduli vibrationes praeter gravitatem concurrunt quoque motrices horologii vires, quae penduli isochronismum turbare maxime possunt. Quare minimos circulorum arcus praeferendos esse, ipsa quoque experientia edocti sunt horologiorum

artifices. Sed haec pauca dicta sint, quantum patitur nobis imposita doctrinae facilitas.

ARTICVLVS IV.

De corporum conflictu.

DEFINITIO I.

Tria distingui debent corporum genera; *dura*, *mollia*, *et elastica*. Dura dicuntur, quae ad mutandam figuram nulla vi cogi possunt. Mollia, quae figuram ita mutant, ut mutationi resistant; eam autem amissam recuperare non nitantur. Elastica tandem dicuntur ea, quae figuram amissam recuperare nituntur. Rursus autem corpora vel sunt perfecte elastica, si nempe restituantur eadem vi, qua fuerunt compressa; vel imperfecte elastica, si restituantur vi minori. Corporum perfecte elasticorum restitutionem ita exprimere solent physici. Dicunt nempe, in corporibus perfecte elasticis *vim restitutivam aequalem esse vi compressivae*. Has definitiones exemplo illustrabimus. Globi duo elastici sibi mutuo occurrant; primum quidem in puncto sese contingunt, sed partes contingentes et sese mutuo prementes cedunt magis ac magis ad certos usque limites, ac proinde augetur per gradus contactus magnitudo, donec partes compressae per eosdem gradus, sed velocita-

tis ordine inverso sese restituant, ut ad pri- Fig.
stinum statum redeant.

Iam ut inter corpora elastica et non elastica comparatio instituatur, fingamus, corpora dura *A*, *B* longa elastrorum serie connexa esse. Si *A* moveatur versus *B*, id fieri non 32.
potest nisi comprimantur elastra, ac proinde corpus *A* agit in *B* per elastra interposita, atque magis ac magis haec elastra comprimentur, donec corpora duo aequales secundum eamdem directionem velocitates habeant. In hoc autem statu nulla vis aget in elastra; ac proinde vim elasticam exserent, et laxari incipient, sed inverso velocitatis ordine. Itaque in corporum elasticorum conflictu considerandae sunt actiones duae. In prima scilicet actione res se habet non secus, ac si corpora essent omni elasticitate destituta. At cessante prima actione statim altera incipit; elastra nempe restituentur eadem vi, qua fuerunt compressa, si perfecta sit elasticitas. Igitur in prima actione extinguitur velocitas, qua corpora ad se invicem accedebant, seu ut vocant, velocitas *respectiva*; in altera autem actione corpora a se invicem recedunt eadem velocitate respectiva, qua nempe ad se mutuo accedebant in prima actione. Vnde patet, motus quantitatem ab unoquoque corpore adquisitam vel amissam in prima actione aequalem esse quantitati motus adquisitae vel amissae in actione altera ita, ut

quantitas motus per conflictum adquiſita vel amiſſa in corporibus perfecte elaſticis duplo maior ſit, quam in corporibus perfecte duris. Quod ſpectat ad corpora imperfecte elaſtica, idem eſt in prima actione effectus ac in corporibus perfecte elaſticis. Verum quia vis reſtitutiva minor eſt vi compreſſiva, minor quantitas motus in ſecunda actione adquiritur vel amittitur. At quia ex data corporum elaſticitate, data etiam eſt ratio vis compreſſivae ad vim reſtitutivam, seu ratio velocitatis reſpectivae ante conflictum ad velocitatem reſpectivam poſt conflictum; evidens eſt, quantitatem motus in prima actione adquiſitam vel amiſſam in eadem ratione augendam eſſe poſt conflictum. Tandem quod ſpectat ad corpora mollia, quorum partes cedunt, ſed ad priſtinam non redeunt figuram; prima actio eadem eſt ac in corporibus perfecte elaſticis vel perfecte duris, illorum velocitas reſpectiva per conflictum exſtinguitur, et unius corporis inſtar progrediuntur, quum nulla ſit vis reſtitutiva. Illud autem diſcrimen inter omnia corpora probe notandum eſt. Corpora mollia tempore finito motum ſuum alteri communicant, eo ſcilicet tempore, quo cedunt corporis partes, et ipſam corporis diametrum percurrunt; ſi corpus perfecte molle fingatur. At in corpore duro, cuius partes cedere non poſſunt, unico temporis puncto indiviſibili communicatur mo-

tus *. Tandem in corpore perfecte elastico tempore finito motus producitur; cedunt nempe corporis partes, et crescente compressione, motu retardato ad se invicem accedunt; donec tandem continuo agat vis restitutiva, qua fit, ut partes motu accelerato ad pristinam properent figuram.

Omnes conflictuum leges hoc uno principio innituntur seu

Lege II. motus: MVTATIO MOTVS PROPORTIONALIS EST VI MOTRICI IMPRESSAE, ET FIT SECVNDVM LINEAM RECTAM, QVA VIS ILLA IMPRIMITVR.

In quavis scilicet binorum corporum collisione, quantum motus lucratur corpus unum secundum datam directionem, tantum quoque lucrari debet corpus alterum secundum directionem oppositam. Quod quidem evidens est ex actionis et reactionis aequalitate. Porro duplex casus contingere potest. Vel enim corpora tendunt ad easdem partes

* *In aliorum physicorum sententia quantitas motus non communicatur per contactum, sed per vires repulsivas agentes ante contactum; ideoque secundum eorum sententiam in corporibus perfecte duris non communicatur motus unico temporis puncto, quum id legi continuitatis adversaretur.*

vel ad partes contrarias. Si primum, quidquid motus additur corpori fugienti, id detrahitur corpori incurrenti, ac proinde eadem manet tota motus quantitas post conflictum, quae fuit ante conflictum. Si secundum, quidquid motus amittit corpus unum secundum propriam directionem, tantum quoque perit in corpore altero. Illa enim corpora agunt in partes propriae directioni oppositas. Igitur in hoc casu eadem manet differentia motuum post conflictum, quae fuit ante conflictum. Duae autem huius principii partes ex duplici axiomate arithmetico facile patent, si nempe duae fingantur quantitates, ex quarum una tantum detrahitur, quantum additur alteri, eadem manet quantitatum summa: si vero ex duabus quantitatibus aequales hinc inde partes detrahantur, eadem manet quantitatum differentia. Iam vero antequam collisionum leges ex demonstrato principio colligamus, observandum est, corporum conflictum vel *directum* esse vel *indirectum*. Directus quidem dicitur, si corporum sibi occurrentium directio sit in eadem linea recta; indirectus autem vel obliquus appellatur, si corporum directiones angulum inter se contineant. De corporum conflictu directo, deinde de indirecto agemus.

Prop. I. SI CORPORA DVO NON ELASTICA SIBI INVICEM OCCVRRANT AD EASDEM PARTES

VEL AD PARTES CONTRARIAS; IN VTROQVE CASV POST CONFLICTVM INSTAR VNIVS CORPORIS PROGREDIENTVR; SED IN PRIMO CASV VELOCITAS COMMVNIS POST CONFLICTVM ERIT AEQVALIS QVANTITATI MOTVS ANTE CONFLICTVM PER SVMMAM MASSARVM DIVISAE; IN CASV AVTEM ALTERO AEQVALIS FIET DIFFERENTIAE QVANTITATVM MOTVS ANTE CONFLICTVM DIVISAE PER SVMMAM MASSARVM.

Si nempe corporum massae dicantur M, m, velocitates ante conflictum V, v; velocitas communis post conflictum erit in primo casu $\frac{MV + mv}{M + m}$, in secundo $\frac{MV - mv}{M + m}$

Et quidem communem esse velocitatem post conflictum, seu corpora duo post conflictum instar unius corporis progredi, evidens est. Quum enim corpora illa ponantur omni elasticitate destituta, nulla est ratio, cur a se invicem resiliant vel separentur. Facile etiam patet, in primo casu velocitatem communem aequalem esse quantitati motus ante conflictum per summam massarum divisae. Etenim quantitas motus eadem manet ante et post conflictum. Est autem quantitas motus productum ex massa in velocitatem. Habebitur ergo velocitas, dividendo quantitatem motus

ante conflictum per summam massarum. Simili ratione patet, in casu altero velocitatem aequalem esse differentiae quantitatum motus ante conflictum per summam massarum divisae. Quum enim eadem maneat motuum differentia ante et post conflictum, sitque quantitas motus, ut factum ex massa in velocitatem; evidens est, ad habendam velocitatem id efficiendum esse, ut nempe differentia motuum a massis liberetur, quod fit dividendo per massas.

Iam huius secundi casus áliquas conditiones expendamus Si massae et velocitates fuerint aequales; erit $mv = MV$, ideoque $MV - mv = 0$. Quare velocitas nulla est, et ambo corpora post conflictum quiescunt. Si massae fuerint aequales, quiescat autem massa m, erit $\frac{MV - mv}{M + m} = \frac{MV}{2M} = \frac{V}{2}$.

Corpora nempe post conflictum dimidia velocitate progredientur. Si massa m quiescat, sitque valde magna et fere immensa respectu massae M, $mv = 0$, ideoque velocitas post conflictum $\frac{MV}{M + m}$, fieret $\frac{0}{0 + m} = \frac{1}{\infty}$, ac proinde physice nulla ob massam m valde magnam.

Ex demonstratis conflictuum legibus in corporibus omni elasticitate destitutis, faci-

le colliguntur conflictuum leges in corporibus elasticis. Etenim si corpora omni elasticitate careant, ex data velocitate communi post conflictum et ex data corporum massa invenitur quantitas motus in unoquoque corpore post conflictum, quae si conferatur cum quantitate motus ante conflictnm, habebitur quantitas motus per conflictum adquisita vel amissa. Iam vero in corporibus perfecte elasticis quantitas motus adquisita vel amissa duplo maior est; in corporibus autem imperfecte elasticis mutatio motus augetur in ratione vis restitutivae ad vim compressivam (*ex demonstratis*). Quare corpora elastica considerentur primum tamquam omni elasticitate destituta, atque inveniatur quantitas motus adquisita vel amissa: utraque duplo maior fiat, si elasticitas fuerit perfecta; augeatur autem in ratione vis restitutivae ad vim compressivam, si imperfecta fuerit elasticitas, atque ita conflictuum leges pro quacumque elasticitatis hypothesi determinare licebit. Has autem leges exemplis illustrabimus. Si corpora omni elasticitate destituta et aequalia ponantur, illorumque unum quiescat; post conflictum dimidiata velocitate ad easdem partes veluti unum corpus progredientur, ut patet ex demonstratis. Quare corpus quiescens dimidiam motus quantitatem adquirit, quam amisit corpus incurrens. Iam si corpora sint perfecte elastica, duplo ma-

ior fiat mutatio motus in unoquoque corpore. Ergo corpus quiescens totam adquiret motus quantitatem, quam amittit corpus incurrens, quod proinde quiescet.

Alterum consideremus casum, dum nempe corpora ad partes contrarias tendunt et facilitatis causa ponamus corpora aequalia et eadem velocitate moveri. Si corpora non fuerint elastica, ambo post conflictum quiescunt, ac proinde totam et aequalem motus quantitatem amittunt. Verum in corporibus perfecte elasticis duplo maior est mutatio. Quare corpora perfecte elastica non solum amittere debent totam motus quantitatem secundum propriam directionem, sed contrariam et *negativam*, ut ita dicam, motus quantitatem adquirere. Quare corpora ad partes contrarias a se invicem resilient aequali motus quantitate. Simili modo ad calculum revocari possunt aliae quaelibet motuum conditiones. Tandem si corpora fuerint imperfecte elastica, accuratissimis experimentis nota sit oportet ratio velocitatis respectivae ante conflictum ad velocitatem respectivam post conflictum; atque in eadem ratione augeri debet mutatio motus. Observavit Newtonus, in globis vitreis, velocitatem respectivam ante conflictum esse ad velocitatem respectivam pos conflictum, ut 16 ad 15. Quare si in globis vitreis aestimari debeant conflictuum leges, hac proportione utendum est. Cete-

rum in praecedentibus demonstrationibus corpora omni elasticitate destituta, et perfecte dura consideravimus: qualia fortase nulla exsistunt in rerum natura. Verum hanc quaestionem ad alium articulum in physices progressu reiicimus. Interim patet, hanc hypothesim falsam aut veram, a nobis fingi debuisse, ut in corporibus elasticis conflictuum leges eruere liceret. Fig.

Schol. 1. Demonstratae hactenus conflictuum leges pendulorum ope ad experientiam revocari solent. Globus *A* vibrationes suas perficiat in circulo *EAF*, itemque *B* in circulo aequali *GBH*. Globus *A* moveatur, et arcum *KA* descendendo, vel arcum *Ar* adscendendo percurrat. Demonstravimus iam, velocitates in puncto infimo *A* fore, ut sunt arcuum adscendendo vel descendendo descriptorum chordae. Itaque effici facile potest, ut corpora, datis quibuslibet velocitatibus, inter se congrediantur. Atque ex arcuum descriptorum chordis post conflictum invenitur velocitas adquisita vel amissa. Atque ita per experientiam probari possunt conflictuum regulae. Verum in instituendis huiusmodi experimentis calculo subduci debet aëris resistentia, quae rem maxime turbat. In causa enim est, ut globus *A* descendens per arcum *EA* ex *R*, adscendendo per *AF* non percurrat arcum aequalem, nec iterum revertatur ad *R*, ut contingeret in vacuo, sed 33.

deveniat in punctum aliquod *U*. Ceterum correctio adhibenda subtilissimis experimentis determinari debet.

De corporum conflictu directo haec pauca demonstrasse satis sit, ex quibus omnes conflictuum casus facile derivari possunt. Ceterum quaestionem metaphysicam de motus communicati causa paucis verbis heic iterum revocabimus. Adfirmat Malebranchius, motuum communicationem cum principiis physicis aut cum aliqua corporum proprietate necessario coniunctam non esse ita, ut inter corporum duorum motum vel quietem nulla maior sit connexio, quam inter corporum figuram, colorem cet. Hinc concludit celeberrimus metaphysicus, corporis incurrentis motum causam physicam non esse, cur corpus percussum moveatur, sed totam motuum communicationem divinae voluntati illiusque immediatae actioni referendam esse. Certum quidem est, voluntatem creatoris omnium naturae effectuum ac proinde et motus communicati primam et supremam esse causam. Verum quod adserit Malebranchius, inter mutuos corporum conflictus nullam maiorem esse coniunctionem, quam inter illorum figuram et colorem, id quidem parum accurate dictum est. Et certe corporis alicuius figura et color ad corporis alterius figuram coloremque nihil omnino conferre possunt. At si corpus aliquod in aliud incurrat,

necessum est, aliquam status mutationem contingere vel in corpore alterutro vel in utroque corpore. Etenim quum partes corporum ob illorum impenetrabilitatem ex eodem loco sese excludat; corpus aliquod incurrens motus directionem persequi non potest, nisi corpus percussum moveatur. Quod si corpus incurrens post conflictum quiescat, iam idem corpus statum mutat; transiens scilicet ex motu ad quietem: quare oportet, ut in corporibus aliqua fiat status mutatio. Res alio exemplo confirmatur. Si corpora duo aequalia, elasticitate destituta sese mutuo in partes directe oppositas aequali velocitate percutiant; ambo post conflictum quiescere ex illorum impenetrabilitate colligitur. Ob eam rationem quiescere etiam debent corpora, si massae fuerint in ratione reciproca velocitatum. Quae quum ita sint, ex ipsis corporum proprietatibus fluere videntur conflictuum regulae. Et re quidem ipsa ex vi inertiae atque ex actionis et reactionis aequalitate pendent omnes, quas tradidimus, conflictuum leges. Itaque nos quidem latet, qua vi aut virtute corpora motum inter se dividant. Motus enim nihil in se reale est, sed tantum aliquis exsistendi modus, nec facilius intelligitur motus quam quietis communicatio. *Virium*, *actionum* nomina adhibent plerique philosophi, sed obscuris vocabulis rem implicant, non explicant. Concludendum ergo est, motuum

Fig. communicationis principium metaphysicum ignotum nobis esse; ex corporum tamen proprietates pendere conflictuum leges, quas infinita sapientia ad fines in huiusmodi creatione propositos direxit et ordinavit omnipotens rerum omnium auctor et gubernator. Quamvis autem ex proprietatibus corporum pendere videantur percussionis regulae; nemo tamen temerario inferat, leges illas omnino necessarias esse, et ab omnipotentis creatoris voluntate nequaquam pendere. Etenim Deus corpora omnia totumque universum libere creavit et conservat, eadem pro arbitrio destruere, annihilare, ubi voluerit iterum creare potest; ac proinde corpora omnia omnesque naturae leges infinitae Dei omnipotentiae subordinantur. Sed haec conferantur cum iis, quae de miraculis diximus in metaphysica, atque etiam cum dicendis deinceps de essentialibus corporum proprietatibus.

Schol. II. Indirectus corporum conflictus ad directum revocari potest. Sint corpora duo
34. sphaerica A et B, quae ex locis A et B eodem tempore exeant secundum directiones AG et BF, sitque velocitas corporis A ad velocitatem corporis B, ut AG ad BD. Describatur parallelogrammum $ABHG$, ducaturque DH. Centro G, et radio corporum A, B semidiametris aequali describatur arcus circuli, rectae DH occurrens in L, l,

agaturque *LN* parallela rectae *GA*, itemque *NR* parallela rectae *GL*. Corporum duorum centra eodem tempore perveniunt ad puncta *N*, *R*, tumque corpora se mutuo tangent. Nam ex triangulorum similitudine *DN* est ad *NL* vel *GR*, ut *DB* ad *BH* vel *AG*, vel etiam ut velocitas corporis *B* ad velocitatem corporis *A*. Quare spatia *BN* ut *AR*, eodem tempore describentur, et corporum centra eodem tempore puncta *N* et *R* attingent *. Quia vero recta *NR* aequalis est semidiametrorum summae; evidens est, corpora sese contingere, sibique occurrere. Iam ducantur *BM*, *AQ* perpendiculares ad *NR*, erunt corporum conflictus iidem, ac si corpus *A* velocitate *RQ* occurreret corpori *B* velocitate *MN*, secundum directionem *NR*. Etenim velocitates corporum *A* et *B* sunt, ut rectae *AR* et *BN*. Praeterea motus *AR*

* *Nempe in motu aequabili si spatia fuerint uti velocitates, tempora sunt aequalia. Sed spatium* BN *est ad spatium* AR, *ut velocitas corporis* B *est ad velocitatem corporis* A, *seu ut* BD *ad* AG. *Nam* DN : GR = DB : GA, *seu* DB : DN = GA : GR, *adeoque* DB — DN : DB = GA — GR : AG, *hoc est*, NB : DB = AR : AG, *seu* NB : AR = DB : AG. *Proinde spatium* BN *est ad spatium* AR, *uti velocitas corporis* B *ad velocitatem corporis* A.

Fig. resolvi debet in duos *AQ* et *RQ*, itemque motus *BN* resolvitur in duos *BM* et *MN*; sed motus *AQ*, et *BM* secundum directiones parallelas nihil conferunt ad conflictum; quare corpora ambo in se invicem agunt non secus, ac si occurrerent sibi mutuo secundum directionem *NR*, cum velocitatibus *RQ*, *MN*. Itaque ex demonstratis patet, motus indirectos ad directos revocari, ideoque invenietur, ut antea, corporum velocitas post conflictum secundum hanc directionem; quo facto reperietur directio composita in hunc modum. Ponatur velocitas cor-
35. poris *A* post conflictum = *Rg*, velocitas corporis *B* = *Nm*, sitque *Rq* aequalis et parallela rectae *AQ*, itemque *Nl* aequalis et parallela rectae *BM*, compleanturque parallelogramma *Rqag*, *Nlbm*. Moveri pergent corpora *A* et *B* post conflictum per diagonales *Ra* et *Nb* cum velocitatibus *Ra* et *Nb*. Quoniam ergo motus indirectus ad directum revocatur, facile patet, qua ratione conflictuum leges ad corpora utcumque elastica indirectis motibus in se invicem incurrentia transferri possint. Varios casus percurrere longius foret atque superfluum.

Schol. III. Ad conflictuum leges referuntur etiam, quae de corporum reflexione tra-
36. ctari solent. Sit *MN* planum immobile, in quod perpendiculariter incidat globus *F* omni elasticitate destitutus. Is post conflictum

rotam velocitatem amittet, ut ex dictis evidens est; quum nec in plano nec in globo quidquam sit, quod globum determinet ad regressum; et praeterea corporis progressum ipsa plani immobilitas non permittat. Adveniat globus oblique per *AC*, et ducta *AD* perpendiculari ad *MN*, completoque rectangulo *ADCF*, motus per *AC* compositus intelligatur ex motibus *AD* et *AF*, quorum alter *AD* vel *FC* elidetur a plano *MN*; manebit autem alter *AF* vel *DC*, ac proinde globus excurret versus *N*; et aequali tempore percurret $CE = DC$, quae erit ad *AC*, ut cosinus anguli *ACD* ad radium. At si globus fuerit perfecte elasticus, in primo casu delatus per *FC* regredietur itidem per *CF* eadem velocitate, qua advenerat, ut patet ex demonstratis de elasticitate perfecta. Si autem adveniat per *AC*, resoluto, ut antea, motu in motus duos *AD* et *DC*, vel *FC* et *CE*, globus progredietur per diagonalem rectanguli *FCEB*, in quo quum latera *CE* et *EB* aequentur lateribus *CD* et *DA*, et anguli ad *E* et *D* sint recti; patet, angulum *ACD*, qui dicitur angulus *incidentiae*, aequalem esse angulo *BCN*, qui angulus *reflexionis* appellatur. Si globus fuerit imperfecte elasticus, et adveniat per *FC*, iam resiliet in *f*, ea scilicet velocitatis parte, quae post conflictum recuperatur, ita ut *Cf* semper sit ad *CF* in data ratione vis restituti-

vae ad vim compressivam. Tandem si globus oblique adveniat per *AC*, servata velocitate per *CE*, et recuperata velocitatis parte per *Cf* vel *EB*, resiliet per *Cb*, eritque angulus reflexionis *ECb* semper minor angulo incidentiae *ACD*. Haec omnia, quae ex motuum compositione et resolutione facile colliguntur, vera sunt dumtaxat, si ponantur conditiones quaedam, nempe si planum fuerit perfecte laevigatum ita, ut mutuus partium attritus nihil officiat. Praeterea consideravimus corpora veluti puncta, aut etiam ea sphaerica esse postulavimus, quum sphaerae in unico puncto sese tangant. Verum si diversas corporum figuras consideremus, res est sane ardua et sublimioris doctrinae. At conflictuum leges exposuisse satis sit in corporibus sphaericis, ex quibus vulgares conflictuum et elasticitatis effectus licet intelligere. Tandem monendum superest, nullam nos habuisse rationem exiguae compressionis, quae in ipso globorum conflictu contingit. Compressio enim et reflexio fiunt per curvam quamdam. Sed quum exiguus omnino sit tactus ille, quo globi comprimuntur, hac de causa nihil turbantur collisionum regulae, quas quidem experientia confirmat.

DE COMPVTATIONE VIRIVM CORPORVM MOTORVM.

Ex his omnibus, quae in praesenti capite explicavimus, nascitur quaestio de *viribus vivis* magna animorum contentione agitata ubique gentium. Leibnitius occasione arrepta ex corporum adscensu uniformiter retardato hanc controversiam primus invexit, quam deinde corporum elasticorum collisione aliisque plurimis argumentis tueri conati sunt magni quidem viri. Quum videret Leibnitius, corpus dupla vel tripla velocitate proiectum sursum adscendere ad altitudinem quadruplo vel noncuplo maiorem, censuit, distinguenda esse bina virium genera; illarum scilicet, quae etiam sine motu habentur, ut est vis gravitatis, vis elastica, quum meram pressionem gignunt, oppositis viribus impedientibus motum, hasque vires iccirco vires *mortuas* appellavit, quo nomine eas secernere voluit a viribus in corpore motum aliquem habente admittendis, quarum effectus sit, ut velocitatis quadratum, easque iccirco vires *vivas* nominavit. Eamdem virium distinctionem ex corporum elasticorum collisione confirmant leibnitiani. Quum enim in globis elasticis in se invicem utcumque incurrentibus, productum ex quadrato velocitatis in massam idem inveniatur post collisionem, quod

erat antea; inde inferunt, in corporibus esse aliquid, quod respondeat massis ductis in quadrata velocitatum, quod illaesum remaneat, et ab uno corpore in aliud transeat, vim scilicet vivam, quae perpetuo conservatur. Mirum sane, quam multas haec quaestio contentiones excitavit, aliis vires vivas aestimantibus ex massa et simplici velocitate, aliis ex massa et velocitatis quadrato. Pro quadrato velocitatis leibnitiani omnes in Germania steterunt: pro simplici velocitate cartesiani in Gallia, newtoniani in Anglia: apud italos divisa studia. Verum quamvis inter celeberrimos viros etiam num hodie acrius ferveat philosophica lis illa; eam tamen in solo nomine positam esse, mihi facile persuadeo. Et quidem in memoriam revocandum est, quod saepe saepius monuimus: vis nomen ambiguum nobis omnino esse, nullamque distinctam illius notionem nos habere, nisi effectum aliquem intelligamus. Itaque vis nomine nihil aliud clare significare possumus, nisi illam proprietatem, qua fit, ut corpora ad motum concitata, vel obstacula superent, vel iis resistant. Quo maior est superata obstaculi alicuius resistentia, eo maior censetur vis, quo quidem vocabulo nullam entitatem corpori inhaerentem intelligere debemus, sed merum factum seu effectus. His iam explicatis, corporum motibus opponi possunt tres obstaculorum species. Vel enim in-

superabilia sunt obstacula ita, ut omnem qualemcumque destruant motum; vel obstacula eam dumtaxat praebent resistentiam, quae ad exstinguendum corporis motum satis sit, illumque statim exstinguit, ut fit in aequilibrio; vel tandem obstacula paullatim et per gradus motum destruunt, ut fit in motu retardato. Quia autem obstacula insuperabilia motum omnem sistere valent, ad corporum vires aestimandas nihil conferre possunt. Itaque superest, ut virium mensuram aut in aequilibrio, aut in motu retardato investigemus. Quod ad aequilibrium spectat, motus quantitates aequales esse, consentiunt omnes, ac proinde vires in hoc casu ex sola velocitate aestimandas esse, fateamur necesse est. Neque etiam repugnat, in motu retardato vires ex motus quantitate aestimari. Etenim si vis nomine intelligatur resistentiarum summa, quam obstacula quaelibet corporum motibus adferunt; iam nulla difficultas esse potest. Et quidem evidens est, quantitatem motus amissam tempore infinitesimo esse, ut productum ex resistentia in tempus infinitesimum, ac proinde resistentia tota est, ut productorum illorum summa, sive ut tota quantitas motus amissa. Porro virium notioni convenientissimum est, vim corporum hoc modo aestimare. Nullam enim obstaculi ideam habemus, nisi quatenus resistit, ac proinde resistentiarum summa sive quantitas motus a-

missa, quae eidem resistentiae proportionalis est, considerari potest tamquam obstaculum superatum, ac proinde vires vivae hoc modo consideratae ex producto massae in velocitatem aestimari debent. At si nomine vis vivae intelligatur alter effectus, puta, numerus obstaculorum, quae superantur, iam alia prodit virium mensura. Etenim ponamus, globum aliquem proiici in elastrorum seriem velocitate duplo, triplo maiori; in primo casu elastrorum compressorum numerus erit quadruplo maior; in casu secundo erit maior noncuplo, et ita deinceps. Quod facile patet. Nam quo maius est spatium percursum, eo maior est elastrorum, quae in spatio continentur, numerus, ac proinde numerus elastrorum est, ut spatium percursum, hoc est, ut quadratum velocitatis. Itaque patet, totam quaestionem huc revocari; an vires vivae aestimari debeant ex primo vel secundo effectu, nempe ex ipsa resistentiarum summa, vel ex ipso obstaculorum numero. Praeterea observandum est, effectum aliquem maiorem longiori tempore produci. Ita si diversis velocitatibus in exemplo praecedenti proiiciantur globi contra plura elastra, globus, qui dupla velocitate proiicitur, quattuor elastra comprimit, sed longiori tempore, scilicet duplo, ac proinde mirum non est, quod dupla velocitas tempore duplo effectum quadruplum producere debeat. Pari ratione

corpus sursum proiectum velocitate duplo maiori ad quadruplam altitudinem adscendit, sed tempore duplo. Haec ergo altera est quaestionis ambiguitas, an scilicet in virium effectibus aestimandis haberi debeat ratio temporis vel non: hae autem considerationes a physicorum arbitrio omnino pendent. Hac facta distinctione et accurate constituta virium definitione, iam omnibus, quae proponi solent, argumentis statim parata est responsio. Neque immorandum est principio, quod *virium vivarum conservationem* appellant. Nempe in globorum elasticorum conflictu productum ex quadrato velocitatis in massam invenitur idem ante et post collisionem. Principium illud ex elasticitatis natura atque ex actionis et reactionis aequalitate unice pendet. Et quidem si globi non fuerint perfecte elastici, velocitatum quadrata ac proinde et vires vivae non servantur. Hanc quaestionem *logomachia* laborare non solum demonstrant ratiocinationes iam explicatae, sed magis ac magis manifestum fiet, si rem ita consideremus. Nempe corpus vel tendit dumtaxat ad motum obstaculo aliquo impeditum, vel re vera movetur velocitate uniformi, vel denique illius motus obstaculo aliquo retardatur, ac tandem omnino exstinguitur. In his omnibus ca[illegible]s diversus est effectus a corpore productus [illegible]orpori tamen nihil novi accedit, sed illiu[illegible]ctio dumtaxat varie applicatur. Itaque d[illegible] dicitur,

vim corporis in certis casibus esse ut velocitatem, in aliis ut quadratum velocitatis, nihil aliud significatur, nisi effectum in quibusdam casibus esse ut velocitatem, in aliis autem ut quadratum velocitatis. Atque etiam probe notanda est *effectus* significatio, quae ut plurimum vaga est, et definitione indiget. Et quidem in tribus enuntiatis casibus effectus vocabulum diversam habet significationem. In primo casu solam tendentiam exprimit; in secundo spatium dato tempore descriptum et constans designat; in tertio tandem casu spatium usque ad motus totius exstinctionem percursum denotat. In his autem casibus singulis nulla habetur ratio temporis, quo actio consumitur. Accurate ergo notandum est, corporis *tendentiam* ad motum, prout est diversimode applicata, varios producere effectus, quorum alii sunt velocitati, alii autem velocitatis quadrato proportionales. Ex his patet, quo sensu intelligi debeat vulgatissimum axioma: *causae suis effectibus sunt proportionales*. Obscure quidem enuntiatum est axioma illud, quum eadem causa diversos effectus producere valeat. Igitur ita restri[illegible]i debet haec propositio, ut nempe effect[illegible] causis suis proportionales sint, si causae e[illegible]n modo agant. Quod quidem probe ob[illegible]ndum est. Persaepe enim fit, ut princi[illegible]n illud, quod est omnino inutile aut s[illegible]em vago modo expressum, incau-

tos philosophos in paralogismos adducat. Haec satis dicta sint de celeberrima controversia, quae licet superflua omnino et inter *logomachias* reiicienda videatur, praestantissimis utilissimisque operibus occasionem dedit.

APPENDIX.

De quibusdam capitis praecedentis utilitatibus.

I.

De corporum descendentium motu uniformiter accelerato in praecedenti capite sermonem habuimus. Ex demonstrata accelerationis lege statim intelligitur, quantus debeat esse corporis ex alto delapsi impetus, quem quidem maximum esse oportet in minimo etiam corpore, dummodo tamen maxima sit descensus altitudo. Heic igitur praetermittendum non est luculentissimum divinae providentiae argumentum. Quum enim minimae aquae guttulae levissimique nivis flocculi aut grandinis globuli ex alto coelo delabuntur, durissimas etiam cervices nostras tanta vi facile frangerent, nisi Deus Optimus Maximus, opposita aëris resistentia, nostrae conservationi providere voluisset. Maximam fluidarum particularum percussionem vulgatissimo experimento exhibere solent physici. Tubus vitreus aliqua

Fig. ex parte aquam continet, pars autem superior aëre vacua est. Tubus hoc modo comparatus manu agitatur ita, ut aqua ad partem tubi superiorem adscendat, et deinde in fundum recidat. Aqua fundum percutiens minima licet quantitate et ex minima altitudine, lapidis ictum sonumque imitatur, atque tubus paullo vehementiori manu succussus in frusta desilit, qui vix levissimum ictum excipit, si aërem contineat. Id autem, oblata occasione, pro religioso institutionum nostrarum fine breviter observatum sit.

Quamvis autem tales nobis proponamus erudiendos auditores, qui non armorum strepitum, sed religionis pacem amare debent; explicatae tamen doctrinae in arte *ballistica* sive *tormentaria* utilitatem exponere licebit.

37. *Sit* AL *altitudo, ex qua grave descendens velocitatem adquireret velocitati proiectionis aequalem. Sit* AD *spatium a corpore percurrendum, agente vi gravitatis, eodem tempore, quo motu aequabili percurreret spatium* AE *velocitate proiectionis. Ex puncto* D *ducatur linea* DQ *aequalis et parallela* AE, *et ex puncto* E *linea* EQ *parallela* AD, *quae proinde ipsi erit aequalis. Tempore, quo grave descendit per* LA, *percurreret motu aequabili et velocitate ultimo adquisita spatium duplum ipsius* LA, *puta* AI. *Erit autem* AD *seu* EQ *ad* AL, *ut quadratum temporis per* AD *seu* EQ,

quod est idem ac tempus motus aquabilis per AE *seu* DQ (ex hypothesi), *ad quadratum temporis per* AL, *quod idem est ac tempus per* AI *motu aequabili et velocitate ultimo adquisita; adeoque, ut quadratum* AE *ad quadratum* AI. *Sunt enim in motu aequabili tempora, uti spatia percursa. Ex analogia ista, ductis extremis et mediis, habetur aequatio:* $AD \times AI^2 = AL \times AE^2$. *Sumtis deinde* AL, AI, AU *continuo proportionalibus, hoc est, sumta* AU *quadrupla ipsius* AL, *erit* $AL \times AU = AI^2$. *Igitur ductis in se invicem duabus aequationibus, erit* $AD \times AL \times AU \times AI^2 = AL \times AE^2 \times AI^2$. *Seu* $AD \times AU = AE^2$. *Ex qua aequatione oritur sequens proportio* AD *seu* EQ : AE *seu* DQ = AE *seu* DQ : AU. *Porro posita vi proiectionis constanti, constans etiam manet* AU, *quae proinde est parameter* (geom. app. de parab. def.): *linea* AD *quum sumatur in axe, abscissa erit: linea autem* DQ, *quae sumitur tangenti* AE *parallela, erit ordinata. Curva igitur a corpore descripta erit, in qua abscissa ducta in parametrum aequatur quadrato ordinatae, seu in qua abscissae sunt, uti quadrata ordinatarum, quae proinde erit* parabola, cuius distantia foci a vertice erit *LA*, ut patet ex elem. geom. Ex hac demonstratione tota pendet ars ballistica, atque ad facilem usum com-

parari poterunt tabulae, quarum ope data vi pulveris pyrii, datisque loci feriendi distantia et altitudine, invenietur elevatio *mortarii*, sive quod idem est, angulus, quem directio globi tormentarii efficit cum horizonte.

Nihil hac in re brevius et elegantius legitur, quam quod tradidit D. de Maupertuis in mon. paris. ann. 1731. hoc fere modo. Rem analytice exprimamus. Sit $AE = t$, $EQ = AD = z$, $AL = a$, ideoque $AU = 4a$; erit $EQ \times AU = 4az$, et $AE^2 = t^2$, ac proinde habetur aequatio ad parabolam $t^2 = 4az$. Iam vero parabola AQ ad lineam horizontalem AB facile refertur. Linea *iactus* AE, ut vocant, sive directio mortarii cum horizonte AB datum efficit angulum, cuius tangens AE dicatur n, sitque $AH = x$, $QH = y$. Sumto AH pro radio $= 1$; erit AH ad HE, ut radius ad tangentem, ac proinde $HE = nx$. Igitur $EQ = EH - QH = nx - y$, et $AE^2 = AH^2 + HE^2$, hoc est, $tt = xx + nnxx$. Quare si in prima aequatione $tt = 4az$, loco tt et z, substituantur praecedentes valores; habebitur $nnxx + xx = 4nax - 4ay$. Iam huius formulae usum consideremus. Data sit distantia horizontalis loci feriendi $AC = b$, eius altitudo $CP = c$. In praecedenti aequatione erit $x = b$, et $y = c$: quare mutabitur in hanc $nnbb + bb = 4nab - 4ac$. Hinc per

radicum extractionem et vulgares aequationum regulas facile invenitur directio mortarii

$$n = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{(4a^2 - 4ac - b^2)}, \text{ ubi}$$

signum $\pm$ designat signum positivum vel negativum ; ac proinde patet , duplicem esse posse mortarii directionem. Etenim sive adhibeatur signum $+$, sive $-$, restitutis quadratis , eadem redit aequatio. Si locus *P* sit in horizonte, iam evanescit *PC* , ideoque

$$n = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{(4a^2 - b^2)}.$$ Si locus *P* sit

infra *C*, erit $n = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{(4aa + 4ac - bb)}$.

Si data sit directio mortarii, erit $a = \frac{nn + 1}{4nb - 4c}$.

Quare invenietur velocitas *proiectionis* , seu vis pulveris pyrii. Itaque patet , ad usum ballisticae artis faciles expeditasque tabulas imperitis etiam militibus parari posse ope huius formulae , quae quidem ipsa sola continet , quidquid in magnis voluminibus scriptum invenitur , atque eam ob causam praetermittere nolui hoc elegantissimum problema ex primis algebrae principiis facile intelligendum. Ceterum in doctrina ballistica hactenus explicata nullam aëris resistentis habuimus ra-

tionem, quam expertissimi quidam viri considerandam esse adfirmant, alii vero negant. Quare in hac inter peritissimos etiam viros opinionum varietate nova experimenta diligentius iteranda esse, censeo. Porro hoc quidem certissimum est, resistentiam maxime minui, si globus missilis sub exiguo volumine maximum pondus continet, ac proinde in hoc casu experimenta ad doctrinae veritatem magis accedunt.

II. In hoc ipso capite pendulorum doctrinam explicavimus. Haec autem est maxima pendulorum utilitas, ut accuratam exhibeant temporis mensuram. Horologia pendulis instruere primus omnium docuit Hugenius in opere immortali: *de horologio oscillatorio.* Quod quidem praeclarissimum inventum eximiam huius capitis utilitatem satis demonstrat. Pauca igitur de horologiorum structura et ex praecedentibus facile colligenda heic adiungam. Pendula horologiis ita communiter aptari solent. Rota, quam vocant *occursus*, horizontaliter volvitur, ac proinde *librator* supra rotam extenditur, eiusque *pinnae* duae, quarum plana angulum rectum comprehendere solent, ita denticulis inseruntur, ut pinna altera denticulo impellatur, dum opposita a suo denticulo se eximit; id autem facile obtinetur, si rota numerum imparem denticulorum habeat, et libratoris axis per centrum rotae transeat. Facilitatis ergo conside-

remus horologium duabus tantum rotis instructum. Prima seu inferior rota 120 denticulos habere ponatur, eaque duas circulationes intra horam fingatur absolvere. Haec ergo aequivalebit rotae denticulorum 240. Secunda rota habeat rotulam denticulorum 5. Dum quinque denticuli maioris rotae transeunt, unam circulationem secunda rota absolvet. Iam per divisionem inveniendum est, quoties quinarius numerus contineatur in 240, *quotiens* erit 48. Quare intra horam secunda rota circulationes 48 absolvet. Ponatur autem, secundam rotam constare 35 denticulis, quorum quilibet duas vibrationes efficit, cum bis libratorem attingant. Quare singulis circulationibus efficiet vibrationes 70. Iam multiplicetur numerus 70 per 48, habebuntur 3360 vibrationes simplices intra horam. Calculus perinde se habet, si eadem manente rota inferiori 120 denticulorum, mutentur rotula et secunda rota. Itaque prima rota sit denticulorum 120, quae duas circulationes intra horam efficiat, ideoque aequivaleat rotae denticulorum 240; rotula secunda sex habeat denticulos; dividatur numerus 240 per 6, quotiens erit 40. Quare secunda rota quadragesies intra horam rotatur. Habeat autem denticulos 45, et quia, ut iam dictum est, denticulus quilibet singulis circulationibus bis libratorem attingit, duplicetur is numerus, fientque 90, quae multiplicentur per 40, et

habebuntur vibrationes simplices intra horam 3600: hoc est, vibratio quaelibet simplex minutum secundum aequabit.

Simili ratione initur calculus pro alio quolibet rotarum numero. Instructum ponatur horologium rotis tribus, quarum prima dentes 112 habeat, secunda rotula dentes 7, rota secunda 60, rotula seu axis tertiae rotae habeat denticulos 8, rotae occursus 15. Hoc modo habebitur vibrationum numerus. Dividatur 112 numerus denticulorum primae rotae, quae singulis horis semel circumvolvitur, per 7, nempe axem secundae rotae. Invenietur, rotam secundam intra horam decies sexies circumvolvi. Habet autem rota denticulos 60. Quare multiplicentur 16 per 60; invenientur 960, ideoque intra horam 960 denticuli rotae secundae transeunt, qui numerus dividendus est per 8 axem tertiae rotae, quae proinde 120 circumvolutiones absolvet. Habet autem haec rota 15 denticulos, qui vibrationes simplices 30 perficiunt. Quare multiplicentur 30 per 120, invenientur vibrationes simplices 3600, quarum una minuto uni secundo aequivalebit.

Ex his omnibus intelligitur praxis horologiorum artificibus vulgatissima. Quaerunt scilicet numeros, qui exprimunt, quoties numerus dentium rotae alicuius denticulos rotae alterius contineat; illos autem numeros *exponentes* vocant. Itaque ex demonstrata

pendulorum doctrina determinari debet numerus vibrationum penduli dati, quo tempore rota aliqua circulationem unam absolvit. Quod quidem facile habetur, quum sit numerus vibrationum dato tempore peractarum in ratione subduplicata inversa longitudinis penduli. Numerus vibrationum inventus dividatur per 2, quotiens erit productum ex omnibus exponentibus; sive quod idem est, duplum productum ex singulis exponentibus aequatur numero vibrationum penduli, durante una rotae inferioris revolutione, ut ex dictis evidens est. Itaque si construendum proponatur pendulum aliquod rotis instruendum, primo notum esse oportet numerum vibrationum penduli, quo tempore rota una suam circulationem perficit. Tempus illud ponatur unius horae, pendulumque ad minuta secunda suas oscillationes componat ita, ut singulae vibrationes sint minuti unius secundi, seu pars $\frac{1}{3600}$ unius horae. Itaque interea dum rota semel circumvolvitur, pendulum absolvet vibrationes 3600, qui numerus erit duplum productum ex singulis exponentibus. Quare si exponentes dicantur r, s, t, erit $3600 = 2rst$, ac proinde $1800 = r\,s\,t$. Quia vero exponentes r, s, t, sunt quantitates indeterminatae, patet, id effici posse, ut nempe rota occursus eumdem

circulationum numerum dato tempore conficiat, mutatis rotarum axiumque dentibus, dummodo productum ex singulis exponentibus idem maneat. E. g. ponamus horologium pluribus instructum rotis, quarum una denticulos habeat 48, dentibus 8 donata sit rotula, cuius axi adfixa sit rota dentibus 40 instructa, habeatque rotula dentes 6, et illius axi inseratur rota dentium 36, qnae cum rotula dentium 6 connectatur. Cum hac rotula iungitur tympanum vel rota occursus. Numerus circulationum rotae occursus, interea dum prima rota circulationem unam absolvit, erit $\frac{48}{8} \times \frac{40}{6} \times \frac{36}{6} = 240$. Si autem alii adhibeantur numeri $\frac{64}{10} \times \frac{50}{8} \times \frac{36}{10} = 240$, alia prodit rotarum series priori aequivalens. Ex his paucis derivari possunt plurima ad praxim utilissima. Ceterum unusquisque facile intelligit, explicatam rotarum combinationem non solum valere in maioribus horologiis pondere appenso ad motum sollicitatis; sed etiam in horologiis portatilibus, quae elastro aliquo moderantur. Haec autem omnia subiecto auditorum oculis horologio exponi debent.

CAPVT II.

De extensione et reliquis inde pendentibus corporum proprietatibus.

DEFINITIO.

Sub duplici ratione considerari potest extensio, vel quatenus est *sensibilis* seu *physica*; vel quatenus est notio *abstracta* seu *metaphysica*. Extensio primo modo considerata est effectus certa corporum actione in organis corporeis productus, quo fit, ut corporum superficies tactu percursae plures a se invicem diversas partes seu varias partium distantias nobis repraesentent. Extensio considerata, quatenus est notio *abstracta*, est ipsa notio materiae a qualitatibus sensibilibus, et quibuscumque limitibus per mentem separatae. Haec altera extensionis species ad metaphysicam proprie pertinet, et spatii *imaginarii* nomine generatim venire solet. Si autem spatium undequaque expansum certis corporum distantiis, atque intervallis restringamus et limitemus, spatium illud determinatum dicitur *vacuum*. Itaque duplex extensio rursus intelligi potest *penetrabilis* et *impenetrabilis*. Extensio penetrabilis seu vacum illa est, quae corpora admittit; impenetrabilis autem vel *soliditas*, quae corpora ex-

cludit. Evidens autem est, *figuram* nihil aliud esse, quam diversam partium extensionem diversumque ordinem, ac proinde ad idem caput referri potest corporum *figurabilitas*. Quare totum caput illud in quattuor articulos dividemus. Primum erit de extensione penetrabili. Secundum de impenetrabili. In tertio de corporum figurabilitate diseremus. In quarto tandem explicatis octo universalibus corporum proprietatibus, de corporis natura ultimum articulum adiungemus.

ARTICVLVS I.

De extensione penetrabili.

I.

Certissimum est, nullam extensionis etiam penetrabilis notionem sine corporum interventu, sine tactu et motu nos adquirere. Etenim fingamus hominem sensuum omnium facultatibus praeditum, qui tactus organum in unicam dumtaxat materiae portionem sine ullo motu exercuerit: extensionis notione careret talis homo, eamque adquirere inciperet, ubi primum alterutrum moveretur. Et re quidem ipsa, corporis alicuius extensionem non cognoscimus, nisi tactus organo ipsam corporis superficiem continuo et sucsessive percurramus. Ad extensionis notionem ita necessario pertinet motus, ut exsistente etiam unica atomo, extensionis no-

tionem possemus adquirere, si tactus organum vel atomus moveretur, et successive ab illa atomo in diversis punctis illud adficeretur. Etenim motus, et *impressionis successivae* continuitas ipsam atomum veluti multiplicant atque extendunt.

Re quidem vera extensionis sensatio per visus organum nobis etiam advenit. Oculus amplissimum spatium, ad quod tactus non pervenit, longe lateque amplectitur: instrumentorum ope maximas etiam obiectorum distantias metitur. Verum id fieri non potest, nisi oculus tactu fuerit edoctus, quod quidem demonstrat exemplum caeci nati, qui ablata cataracta oculorum usum adquisivit. Hanc historiam narravimus et explicavimus in metaphysica, ubi de extensionis et spatii notione plura tradidimus. Id ergo compertum est, sine tactus exercitio nullum de obiectorum dimensionibus, formis, distantiis, extensione fieri posse iudicium. Neque extensionis ideam formare quis posset, etiamsi obiectorum imagines in fundo oculi delineatas moveri fingamus. Hi enim apparentes motus simplici *successionis* notioni originem praeberent, non secus ac faceret tonorum vel odorum series, quae successive auditus vel olfactus organa adficeret; sed nulla motus realis, ac proinde nec extensionis notio nasci posset. At tactus organum in ipsam materiam immediate agit: dimensiones formasque corporum sentit:

et quamdam experitur resistentiam, quam ad aliquid extra nos exsistens referre cogimur.

II. Quamvis extensionis notio ex ipsa corporum exsistentia ducat originem, immerito tamen inde colligeretur, nullam esse extensionem corpore vacuam seu penetrabilem. Hac de re magno animorum aestu in scholis disputatur. Vacui exsistentiam negabant peripatetici: possibilitatem negant cartesiani. Ab utraque tamen philosophorum secta longe differunt leibnitiani, qui nullam *realem* extensionem admittunt, sed extensionem quamlibet veluti merum *phaenomenon*, rerumque coëxsistentium ordinem arbitrantur. Hanc opinionem, quam in metaphysica iam explicavimus, variis in locis opportune revocabimus. Porro licet sensuum testimonio circa hanc quaestionem nihil omnino definiri possit; vacuum tamen exsistere, ostendunt rationes validissimae. Ad praesentem articulum pertinent conclusiones duae.

CONCLVSIO I.

VALIDISSIMIS RATIONIBVS PROBATVR VACVVM *.

I. Fingamus, nullum exsistere vacuum;

* *Vacuum indiscriminatim heic sumitur, sive fuerit illud* magnum, *sive* mini-

corpora omnia sunt aequaliter plena, seu eamdem materiae quantitatem continent sub eodem volumine, quod quidem fateri coguntur, qui vacuum negant. Demonstravimus autem, pondera quantitatibus materiae proportionalia esse. Igitur sub eodem volumine idem pondus habent corpora singula, quae proinde forent eiusdem gravitatis specificae, sed absurdum est, aurum levissimamque plumam eiusdem dici gravitatis specificae: diversissimas corporum gravitates specificas, ideoque et vacuum demonstrant experimenta.

II. In physica notissimum est iam antea a nobis descriptum experimentum, quo nempe corpora quaelibet in vacuo boyliano aequalibus temporibus aequalia spatia ab initio motus computata percurrunt, sive corpora in amplissimum volumen extendantur, sive in angustissimum redigantur. Illud vero experimentum demonstrat, non solum aërem hauriri, sed etiam illius loco nullum aliud fluidum succedere. Etenim quodcumque sit fluidum illud; quo maior est cor-

mum, *seu ut loquuntur scholastici*, coacervatum *vel* disseminatum. *Nempe non facile sensibus aut experimentis determinari potest utriusque limes. Praeter quam quod opinatur Iacquierius noster cum Newtono, exsistere vacuum magnum saltem in spatiis coelestibus, qua globi planetarum moventur.*

poris superficies, eo plures fluidi particulae corpori descendenti resistunt, ac proinde corpus, mutata utcumque superficie, eadem non descenderet velocitate. Immo corpora sibi libere relicta per aërem non descenderent; aër enim foret eiusdem gravitatis specificae cum corpore immerso, quod proinde aëri innataret. Huius argumenti vis tota intelligetur, explicata deinde fluidorum doctrina. Interim vero experimentis compertum habeatur, idem corpus maiori vel minori volumine donatum per idem fluidum eadem velocitate non descendere; immo quiescere, si eamdem cum fluido habeat gravitatem specificam.

III. Demonstravit Newtonus, motum globi intra fluidum aeque densum delati ob ipsam fluidi resistentiam totum amitti eo tempore, quo globus percurreret $\frac{8}{3}$ diametri suae. Haec quidem demonstratio ad difficiliorem fluidorum doctrinam pertinet. Interim tamen evidens est et experientia compertum, fluida densissima corporum motibus maxime resistere. At si nullum admittatur vacuum, iam fluida omnia talem habent densitatem, qua nulla maior esse possit. Itaque a multis retro saeculis perturbatus atque exstinctus omnino fuisset globorum coelestium motus, qui tamen certa perpetuaque periodo absolvitur. Alia quidem plurima adferri solent argumenta, sed haec pauca omnium validissima seligere satis sit, ex quibus tandem

sic concludere licet. Admittendum est vacuum, quod experimenta phaenomenaque coelestia demonstrant; atqui et experimenta et phaenomena coelestia vacui exsistentiam demonstrant; ergo exsistit vacuum.

SOLVVNTVR OBIECTIONES.

Obiect. 1. Admittere non repugnat fluidum aliquod subtilissimum; quod corporum omnium poros libere permeet, quod proinde in *campanam pneumaticam*, extracto aëre, succedat, nullumque vacuum permittat. Neque etiam repugnat, fluidum illud esse omnis gravitatis expers. ¿Etenim quid prohibet, fluidum aliquod concipi sine conatu vel *tendentia* ad centrum terrae? Hanc vim in subtilissimis flammae lucisque particulis minime observamus. Hinc cartesiani ita argumentantur: ad demonstrandum vacuum diversam corporum gravitatem specificam maxime iactant qui vacuum admittunt; atqui in praedicta hypothesi ratio illa evanescit omnino; ergo ex diversa corporum gravitate specifica nullum duci potest argumentum pro vacui exsistentia. Rep. C. mai. dist. min. et talis hypothesis fictitia omnino est et philosophandi regulis contraria, C. et hypothesis illa philosophica est et philosophandi regulis consentanea, N. Quare N. cons. Commentitium illud fluidum e cultiori physica proscribendum

esse, iam demonstravimus, ubi sermo fuit de vorticibus cartesianis. Et re quidem ipsa huius argumenti pondus gravissimum ita senserunt recentiores cartesianae hypotheseos reformatores, ut vacuum admittere non dubitaverint. Quod spectat ad flammae lucisque materiam, tantilla est illarum gravitas, ut nullo experimento conspicua esse possit, omnemque physicorum diligentiam longe fugiat. Haec autem levitas, quae *relativa* est dumtaxat, nostrae conclusionis veritatem apprime confirmat. Inde enim evincitur, lucis particulas nihil fere materiae continere, ac proinde et vacuum exsistere. Id rursus facili ratiocinatione intelligere licebit. Tanta est radiorum solarium velocitas, ut totum illud vastissimum spatium, quod solem inter nostrumque globum expanditur, brevissimo septem vel octo minutorum intervallo percurrant. Quod quidem demonstrant suo deinde loco referendae observationes astronomicae. Iam vero fingamus, minimam materiae portionem, quae sub experimentis cadere possit, in delicatissimum visionis organum tanta et fere immensa velocitate incurrere, unico ictu solverentur omnino delicatissimae oculorum partes, et in pulverem redigerentur. Recordandum enim est, vires corporum esse, ut productum ex quantitate materiae in velocitatem aut in quadratum velocitatis. Quare quum ex perpetuo radiorum solarium fluxu offensionem nullam

patiantur oculi ; hinc patet , exiguam omnino esse et fere nullam in radiis solaribus materiae quantitatem. Id vero magis ac magis manifestum fiet comparatione instituta cum minimis globulis vi pulveris pyrii explosis, quorum tanta vis est , ut non solum homines, sed urbium quoque muros disiicere et solo aequare valeant. Tandem fatendum est , nulla severa demonstratione ostendi posse talis fluidi impossibilitatem , quum ignota nobis sit intima corporum natura. Verum in hisce dumtaxat proprietates consideramus , illasque ad humanae societatis utilitatem transferre conamur. Quare etiamsi tale fluidum liberalius concedamus , quod tamen philosophandi legibus repugnat , nobis perinde est , ac si nullatenus exsisteret. Ideoque de hoc inutilissimo fluido nihil curare debent physici , qui *multa scirent utilia , si non discerent superflua.*

Obiect. 2. Ad explicandam motuum coelestium perpetuitatem atque constantiam radiorum solarium ęxemplo iterum utuntur cartesiani. Et quidem solares radii sine ullo impędimento , sine perturbatione ulla sese mutuo decussant , et secundum quamlibet directionem intersecant. Fingamus ergo , planetas in simili fluido deferri , iam nullam resistentiam patientur. Ponamus nempe , fluidi coelestis particulas omni tenacitate et inertia esse destitutas : nullum errorem experientur coelestes motus , ideoque evanescit alterum

vacui argumentum. Vnde sic argumentantur; non repugnat hypothesis illa, quae radiorum solarium exemplo confirmatur, atqui ex phaenomenis radiorum solarium colligitur, nullatenus repugnare fluidum cartesianum; ergo nullum est argumentum desumtum ex motu planetarum ad vacui probationem. Resp. N. min. Ad illam obiectionem eadem fere est, quae ad praecedentem, responsio. Etenim quod solares radii sine ulla perturbatione sese mutuo traiiciant, id repetendum est ex illorum incredibili fere subtilitate et materiae quantitate fere infinite parva. Haec ergo summa radiorum mobilitas et directionis cuiuscumque facilitas ipsum vacuum demonstrant. In hac obiectione fingitur fluidum omni inertia et partium tenacitate destitutum; quod quidem fingere non minus absurdum est philosophandi regulis contrarium, quam corpus aliquod gravitate spoliare.

Obiec. 3. Non repugnat, extensionem merum esse phaenomenon, nullamque extensionem re vera exsistere. Leibnitianam hac de re hypothesim in metaphysica iam explicavimus. Si nempe res plures tales sint, ut diversas in organis sensoriis impressiones diversasque in nobis excitent ideas; iam res illas consideramus tamquam plures, ideoque extra se invicem exsistentes. Ex illa diversitatis notione per sensus et maxime per organum tactus adquisita nascitur notio extensionis. Pari

modo quod corpus determinatam repraesentet figuram, magnitudinem, motum, id fit non, quod res ita se habeat, sed nihil aliud significatur, nisi corpus tale esse, ut illas in nobis excitet ideas, quas experimur. Vnde sic argumentari licet: nullum exsistit vacuum, si extensio merum sit phaenomenon; atqui haec hypothesis non repugnat, quum nos lateat intima rerum natura; ergo frustra de vacuo disputatur, si spatium nihil re vera sit.

Resp. dist. mai., si extensio *sensibilis* merum sit phaenomenon, hoc est, si mere *idealis* sit, nihilque *realitatis* extra mentem habeat, C. mai., si extensio merum sit phaenomenon, hoc est, si nihil *substantialitatis* habeat, non sit tamen merum nihil, Neg. mai. et dist. min. N. cons. Breviter explicari debet haec obiectio, quae deinde in meliori lumine collocabitur, ubi sermo erit de corporis natura. Cartesiani dividunt corporum proprietates in *absolutas* seu *primitivas*, et in *relativas* seu *secundarias*. Proprietates absolutas dicunt illas, quae ad tactum pertinent, extensionem in primis et soliditatem, reliquas vero, quales sunt odores, colores, sapores, soni cet. relativas appellant. Arbitrantur nimirum, proprietates absolutas eo modo in corporibus exsistere, quo nobis repraesententur. At proprietates relativas tales esse, adfirmant, ut certam ad nostras Ideas habeant relationem, vi cuius tales ideas

constanti lege in nobis excitant ita, ut tamen res longe aliter se habeat, ac nobis apparet. Verum alii subtiliores metaphysici omnes omnino corporum proprietates aeque relativas esse existimant: ignotam prorsus nobis esse intimam corporis naturam adserunt: nullamque proinde adferri posse accuratam definitionem, sed a nostro dumtaxat cognoscendi modo desumtam. Quod ut intelligatur, diligenter notandum est, ideas nostras proprietatibus illis similes omnino esse non posse, ut externae hominis figurae pictura est similis; nam horum utrumque et substantiale est et aeque materiale. At idea ad mentem pertinet, nihilque substantiale aut materiale habet, quale est ideae obiectum. Quare hoc similitudinis genus ne in ideis quidem per tactus organum excitatis haberi potest. Deinde notandum est, talem in omnibus ideis ad obiecta ipsa haberi relationem, ut ab iisdem obiectis eodem modo applicatis eaedem in nostra mente excitentur ideae. Quod quidem in nostris institutionibus metaphysicis fuse explicavimus. Itaque philosophi illi nullum inter sensibiles corporum qualitates statuunt discrimen, easque considerant tantum veluti actionem, quam corpora certis legibus in sensuum nostrorum organa exercent, ex qua sensatione certa idea in mente excitatur. Sed quidquid sit de variis illis philosophorum placitis ad trutinam deinde revocandis, in-

terim evidens est, hanc obiectionem nostrae conclusioni minime contrariam esse, si probe recordemur cultioris physices scopum. Consideramus nempe sensibiles corporum qualitates, quatenus sunt effectus ad nos et humanae societatis utilitatem referendi. Porro manifestum est, in hoc sensu negari non posse extensionem, *sensibilem* scilicet, quidquid sit de extensionis natura. Sed *nostrum non est tantas componere lites.* At observandum est, cum *idealistis* confundi non debere philosophos, qui extensionem veluti phaenomenon habent. Et quidem idealistae corpora exsistere negabant, nostrasque omnes sensationes perpetuum errorem esse somniabant. Ab hac autem insania, quam in metaphysica confutavimus, longe absunt praedicti philosophi, qui corpora exsistere admittunt, et ex ipsa partium coëxsistentia extensionis notionem oriri, adfirmant. Eodem nimirum sensu extensionem phaenomenon appellant, quo color phaenomenon dici solet. In hac hypothesi evanescere et submoveri omnino videtur tota de *vacuo* et *pleno* controversia. Quum enim ex spatii et extensionis notione haec quaestio originem habeat, tota huc revocatur, an scilicet extensio et spatium sint realitates, quae aliquid substantialitatis habeant, an vero in simplici partium coëxsistentium ordine consistant. Si quaestio ita explicetur, iam tota cadit; quum plenum et vacuum mera sint phaenomena. Itaque inve-

stigari non debet, utrum exsistat plenum aut vacuum, sed potius instituenda est quaestio, an per phaenomenon vacui aut per phaenomenon pleni naturam nobis possimus repraesentare. Immo quum heic agatur de natura, non prout est in se, sed quatenus nobis apparet, non repugnat, vacui et pleni phaenomena simul exsistere, si non in eodem casu, saltem in casibus diversis. Et re quidem ipsa pari iure nobis repraesentari licet extensionem ex partibus *similaribus* et sine ulla vi compositam; vel constantem ex partibus dissimilaribus et vi aliqua praeditam. In primo casu vacui leibnitiani, in altero autem pleni leibnitiani notionem formamus. Haec autem explicatio conferri debet cum iis, quae de spatio et extensione diximus in metaphysica. Ceterum haec omnia, quae incautis nulliusque attentionis hominibus frivola videri possent, utilissima tamen esse atque gravissima, in appendice demonstrabimus.

Inst. 1. Si vacuum exsistere fingamus, iam nulla est ratio, cur corpora hunc vel illum locum occuparent. Quum enim similares sint atque uniformes singulae spatii partes, sine ulla ratione sufficiente ad orientem vel occidentem locata fuissent corpora, atque hinc in hypothesi vacui creationis impossibilitatem arguunt leibnitiani, quum Deus sine ratione nihil facere possit. Vnde sic argumentantur: admittenda non est opinio illa, quae rece-

ptissimo rationis sufficientis principio repugnat; atqui huic principio repugnat spatium vacuum; ergo vacuum admitti non debet. Resp. N. mai. In effectibus materialibus admittendum quidem esse rationis sufficientis principium, ostendimus in metaphysica; at in effectibus liberis locum habere non posse, ibidem demonstravimus. Porro creatio mundi pendet ab omnipotenti Dei voluntate, quae est suprema et ultima rerum creatarum ratio. Itaque principium illud in effectibus liberis etiam humanis reiiciendum omnino est; immo in effectibus etiam materialibus parce admodum adhiberi debet; neque tantam, quantam leibnitiani praedicant, utilitatem habere potest. Quum enim nos ut plurimum lateat rerum sufficiens ratio, firmissima non sunt argumenta, quae ex ratione sufficiente desumi solent. Principium istud adversus nostram conclusionem minime valere certissimum est. Dum enim vacuum admittimus, de spatii natura nobis prorsus ignota nihil pronuntiare audemus, atque satis nobis est reiicere *plenum cartesianum*. Neque aliquid adfirmare volumus de obscurissima controversia, an plenum et vacuum pro phaenomenis haberi debeant, ut explicavimus in praecedenti responsione. Igitur probe observandum est discrimen inter hypothesim cartesianam et leibnitianam. Haec ultima tum plenum tum vacuum ut mera phaenomena iudicat; neque haec

opinio iisdem laborat difficultatibus, quibus obnoxia est cartesiana hypothesis. Ita adversus plenum cartesianum obiici solet motus impossibilitas, cuius quidem obiectionis non tanta est vis, quanta in vulgaribus physicorum libris iactatur. At in leibnitiana hypothesi nulla est omnino. Dum enim dicunt leibnitiani, corpus aliquod data velocitate datum spatium percurrere, motus et spatii nomine non intelligunt realitatem aliquam in rebus exsistentem, sed dumtaxat ideam confusam, quam mobilis perceptio diversusque coëxsistentiae ordo in anima producunt. Hoc modo interpretandum esse, aiunt, celebratissimum Zenonis argumentum de Achille et testudine. Et quidem minus verisimile existimant eo insaniae umquam devenisse aliquem, ut motum, prout est phaenomenon, negare potuerit, eumque a Zenone negatum fuisse opinantur in eo dumtaxat sensu, quod notiones spatii, loci, temporis motusque sensibilis veluti imaginarias habuerit. Ceterum tantum abest, ut ex hac rerum physicarum obscuritate tantaque opinionum varietate aliquid utilitatis praeclarissimae huic sententiae detrahi possit; quin potius hinc derivari possint utilitates maximae, quas in appendice demonstravimus.

CONCLVSIO II.

CORPORA OMNIA INNVMERIS PORIS PERTVSA ESSE, DEMONSTRATVR.

I. Corpora omnia etiam ponderosissima infinitis propemodum poris seu foraminibus cribrata esse, manifestum est exemplo crystalli. Nulla iu crystalli superficie adsignari potest pars vel minima, quae non sit eximie pellucida. Haec autem pelluciditas summa intelligi nequaquam potest, nisi usque ad opposita superficierum puncta radiis lucis pateat facilis transitus. Hinc evidens est, crystallum non solum innumeris poris scatere, sed nihil fere materiae solidae continere. Inde autem iudicium ferri potest de auri porositate. Notum enim est experimentis, pondus auri esse ad pondus crystalli sub eodem volumine ut 8 ad 1. Quare densitas in auro est ad densitatem in crystallo ut 8 ad 1, ideoque aurum licet sit corporum omnium, quae nobis nota sunt, ponderosissimum; nihil fere habet materiae, ac proinde infinitis propemodum poris pertusum est. Et quidem si aurum redigamus in tenues lamellas, easque microscopio contemplemur non solum apparent pellucidae, sed variis modis implexae innumerisque meatibus hiantes observantur. Simili ratione argu-

mentando a *fortiori*, ut dicunt, demonstratur, multo magis porosa esse corpora alia.

II. Praecedens demonstratio satis quidem esset, sed adferre non abs re erit experimenta nonnulla, quae utilissima esse possunt. Durissima etiam marmora a fluidis plurimis penetrantur, a spiritu vini, a spiritu terebinthinae. Parare docuit clar. Dufaius in mon. paris. ann 1728 et 1732 liquores plurimos, qui compactissimos quoque lapides facile pervadunt, suaque relinquunt vestigia. Hinc si liquores illi variis tingantur coloribus, atque in aliqua superficie ducantur lineamenta, per varia lapidis strata ad oppositam usque superficiem liquorum vi transmitti poterit imago quaelibet suis picta coloribus. Notissima est physicis perspiratio insensibilis, quae a primo observatore Sanctorio nomen *sanctorianae* retinuit. Ex octo alimentorum libris, quas aliquis uno die sumeret, quinque circiter heic apud nos, aetate vegeta, vita commoda, victu moderato, per transpirationem elabuntur. Huius tamen transpirationis copia maior vel minor est pro regionum varietate diversaque coeli temperie. Omnium animalium cutis scatet vasis innumeris, quorum aliqua *absorventia*, alia *exhalantia* vocantur. Haec vascula, quae sub squamulis *epidermidis* oblique patent, tantae sunt subtilitatis, ut computante Leeuwenhokio, in spatio unius arenae granulo non maiori hient plusquam

125000 huiusmodi meatus. Hi, *absorventes* scilicet, subtilissimis particulis ingressum; isti autem, nempe *exhalantes*, exitum permittunt. Ex hac corporis humani porositate intelligitur balneorum usus: per totam corporis superficiem introductis aquae particulis ad sanguinem usque, cuius moleculas nimium cohaerentes dividunt, et ad circulationem faciliores reddunt. Haec summa porositas in arboribus plantisque omnibus observatur: vegetabilia omnia e terrae gremio per poros suos succum nutritium hauriunt, et per totam substantiam quaquaversum propagant. Legenda sunt pulcherrima hac de re experimenta, quae habuit clariss. Halesius in *statica vegetabilium.*

Neque practermittenda est ovorum porositas, ex qua trahi potest utilitas non exigua. In suprema ovi recens exclusi superficie videre licet substantiam quamdam lacteam. Haec autem progressu temporis evanescit per ipsos corticis poros elapsa, atque hinc ova nutritioni minus fiunt idonea, et tandem corruptioni obnoxia. Vt autem haec materia servetur integra, ovaque a putredine liberentur, hoc remedium excogitavit Reaumurius. Ovi putamen adipe ovina, vel etiam *vernice*, ut vocant; facta ex spiritu vini, ex omni parte imbuunt. Hoc artificio materiae lacteae exitus praecluditur, et ova per plures menses integra servari possunt, non secus ac si

recens fuerint exclusa. Quod quidem in longinquis navigationibus in primis utile esse potest.

In vulgaribus physices institutionibus describitur attramentum, quod *sympaticum* vocant. Hoc autem modo parari solet. Lythargyri uncia sumatur, quae cum aceti destillati unciis quinque vel sex misceatur; ubi autem acetum lythargyro probe saturum est, illud per chartam de more percoletur. Hoc liquore, qui *acetum saturni* a chimicis appellatur, utendum est ad exarandos characteres, quos non magis conspicies, quam si aqua scripseris. Verum si adhibeatur liquor alius mox dicendo artificio comparandus, iam characteres pulchre fiunt conspicui. Itaque capiantur auripigmenti uncia una, quae cum calcis vivae unciis duabus misceatur: mixturae immittatur aqua: habebitur liquor alter, quo imbuenda est charta aliqua characteribus antea descriptis imponenda. Ceterum etiam interpositis chartarum foliis, statim huius liquoris particulae multa permeant chartae folia, et characteres, qui antea oculos fugiebant, praeclare nigros legemus atque mirabimur.

Ex descriptis experimentis patet, innumeris poris pertusa esse dura cuiuslibet speciei corpora. Vnum dumtaxat in corporibus fluidis experimentum adferre satis erit. Fluidorum porositas inde facile colligitur, quod fluida quaedam se invicem imbibant. Si in-

tra tubum, in quo oleum vitrioli continetur, certa infunditur aquae quantitas, et volumina respectiva notentur; mixtione facta atque fermentatione sedata, volumen invenitur iusto minus. In aliis mixtionibus plurimis idem se expertum fuisse, testatur Muschenbroëckius. Sed generatim fluidorum omnium porositas ex diversa eorum gravitate specifica facile patet. Itaque ex his omnibus sic concluditur: admittenda est summa illa corporum porositas, quam capta in omni corporum genere experimenta demonstrant; atqui adducta mox experimenta maximam corporum porositatem confirmant; ergo corpora innumeris poris pertusa sunt.

SOLVVNTVR OBIECTIONES.

Obiect. 1. Si corpora omnia innumeris poris persusa sunt, iam absoluta corporum pondera non cognoscimus: ignota est materiae quantitas, ac proinde et ignotum pondus, quod materiae quantitati proportionale est; atqui id repugnare videtur, ergo etiam repugnat summa illa porositas, quae in conclusione adseritur. Resp. C. mai. N. min. Nullum inveniri potest corpus perfecte solidum, quod quidem si invenire liceret, iam innotesceret quantitas materiae in singulis corporibus, illorumque proinde pondus absolutum, conferendo scilicet datam aliquam materiae

portionem cum pari volumine diversorum corporum. Quamobrem quum tali corpore perfecte solido careamus, superfluis coniecturis indulgent otiosi philosophi, qui fictitiis hypothesibus materiae quantitatem determinare conantur: immo totum hoc universum ex materiae quantitate valde exigua constare probabilissimum est, et praeiudicatas hac de re vulgi opiniones demonstravimus, ubi sermo erit de materiae subtilitate.

Obiect. 2. Si tanta sit corporum porositas, in errorem nos perpetuo inducerent sensuum organa, falsisque sensationibus nos perpetuo deciperet Deus; atqui haec illusio divinae veracitati repugnat; ergo pariter repugnat tanta in corporibus porositas. Resp. N. mai. Plurimae sensuum fallaciae per ratiocinationem philosophicam corrigi atque emendari possunt, nec sensibus temere credendum est: *non est iudicium veritatis in sensibus*, inquit Sanctus Augustinus. Itaque Deus ad sensuum errorem nos nominime cogit. Praeterea superbissimos sese ostendunt philosophi, qui humanas cognitiones ultra iustos limites longius extendunt. Pauca admodum novimus in rebus philosophicis; atque in hac cognitionum nostrarum imbecillitate non violatur divina veracitas, sed contra maxime commendantur optimi numinis infinita bonitas, cui placuit eas tantum hominibus concedere cognitiones, quae

ad iustas vitae huius utilitates, et ad finem ultimum, vitam scilicet aeternam, perducere possunt.

Obiect. 3. Si corpora tot poris pertusa sint, iam per omnium corporum poros perpetua effluerent corpuscula: per ipsos quoque corporis humani poros necessarias ad vitam fluida erumperent, atqui haec perpetua effluvia repugnant omnino; ergo nulla talis est in corporibus porositas. Resp. N. min. Re quidem vera ex singulis corporibus perpetua exeunt effluvia, quae quidem ponderis iacturam aliquando demonstrant, interdum autem nullam, pro varia effluviorum subtilitate. Haec effluviorum tenuitatem fere incredibilem otendunt corpora odorifera, quae per plures annos, absque ullo, quod observationibus et experimentis conspicuum esse possit, ponderis detrimento, subtilissimas emittunt particulas, quibus organi olfactorii pupillas pungi atque vellicari necessum est. Quod autem per corporis humani poros necessaria ad vivendum fluida non erumpant; id repetendum est ex diversa fluidorum pororumque figura, cuius eam oportuit esse varietatem, ut in sani corporis statu necessariis fluidis exitum prohiberet. Itaque rursus semperque laudanda est divina bonitas, quae admirabilem corporis nostri structura ita composuit, ut vivere possemus, et quantum ipse Deus vellet, viveremus, ad immortalem vitam deinde transituri.

ARTICVLVS II.

De extensione impenetrabili.

I.

Impenetrabilitatem iam definivimus eam corporis proprietatem, qua fit, ut singula corpora omnibus aliis undequaque prementibus resistant, et quamdiu aliquem occupant locum, corpora alia ab eodem loco excludant. Porro heic sermonem habemus de impenetrabilitate *sensibili*, qualem per contactum sese manifestat. Non desunt quidem doctissimi viri *P. Boschovichius eiusque discipuli*, qui nullam accuratam continuitatem admittunt, omnemque contactum immediatum e natura excludunt. Censent ergo, materiam omnem et corpora constare punctis prorsus indivisibilibus et inextensis, quae puncta semper a se invicem distent aliquo intervallo, quod imminui quidem possit in infinitum, sed non possit auferri sine punctorum penetratione. Putant scilicet puncta illa praedita esse quibusdam viribus, quas *repulsivas* appellant. Vires nempe illae imminutis in infinitum distantiis augentur in infinitum, ac proinde puncta in minimis distantiis coguntur a se invicem recedere, donec tandem in certa distantia adhuc tamen minima nullae sint: tum directionem mutent,

et mutata directione dicantur attractivae. In hac igitur hypothesi punctorum vires crescunt atque decrescunt, mutataque directione migrant ex attractivis in repulsivas et contra. Ista tamen puncta viribus attractivis et repulsivis donata firmissimas possunt massas constituere: ubi nempe posita sunt in iis a se invicem distantiis, in quibus imminuta vel tantisper distantia ingens habetur vis repulsiva; distantia autem aucta ingens habetur vis attractiva. Itaque ex harum virium combinatione oritur impenetrabilitas, non ex immediato contactu. Porro quamvis in hac opinione nullus sit contactus immediatus; exsistit tamen contactus physicus et sensibilis. Tantillae enim sunt punctorum distantiae, ut omnem sensuum subtilitatem longe fugiant. De hoc argumento iterum oblata occasione breviter nobis dicendum erit. Quia vero minima punctorum intervalla sub sensus non cadunt, res omnes perinde se habent, quod ad effectus physicos, quos quidem in nostris institutionibus unice considerandos nobis proponimus. Hinc de impenetrabilitate sensibili et physica dumtaxat heic sermo est.

Schol. 1. Hanc impenetrabilitatis seu soliditatis speciem perpetuo experimur. Sive enim quiescamus sive moveamur, continuo deprehendimus, alia corpora, quibus nostrum corpus innititur, resistere, et resistendo impedire, ne telluris superficiem profundius pe-

netremus. Dum quotidiana necessitate corpora contrectare cogimur, resistentiam manu sentimus, atque ex hac resistentia originem habent explicatae antea conflictuum leges. Haec proprietas corporibus omnibus competit, sive fluida sint sive firma, sive dura et fixa, seu mollia et facile mobilia. Fluida enim in vasculis conclusa atque compressa resistentiam ostendunt, ne quidem excepto aëre fluido tenuissimo. Quamobrem licet sensu tactus illam non deprehendamus resistentiam, nisi in materiae partibus, quae possunt tactus organum adficere; tamen per analogiam naturae hanc eamdem resistendi vim ad corpora subtiliora sensibus impervia transferre licet. Ceterum patet, hanc corporum proprietatem cum vi inertiae coniunctam esse, et ex ea pendere. Atque hinc intelligitur ratio, cur praeter vulgarem consuetudinem ultimo loco tractatum sit de extensione impenetrabili; atque etiam de penetrabili, cuius notionem ex ipsa impenetrabilitate haurimus atque derivamus.

Defin. 11. Ex hactenus explicatis manifestum est, impenetrabilitatem sive soliditatem a corporum duritie longe distinguendam esse, quod quidem non satis accurate praestiterunt aliqui. Et quidem durities est firma quaedam partium connexio saltem *sensibilis*, qua fit, ut partes illae aegre divelli possint, et mollem quamdam constituant, cuius figu-

ra difficulter mutatur. At soliditas, de qua heic agimus, mollioribus durisque corporibus competit. Nec confundi debet soliditas geometrica cum soliditate physica. His gradibus progrediuntur geometrae. Corpora primum considerant simul cum sensibilibus eorum proprietatibus, a quibus deinde abstrahunt, et tandem corpora veluti quamdam extensionis penetrabilis, divisibilis et figuratae portionem contemplantur. Itaque corpus geometricum nihil est aliud, quam extensionis pars aliqua undequaque terminata. Tres huius extensionis dimensiones generali veluti prospectu primum spectamus. Verum ad facilius determinandas proprietates singulas, unicam deinde separamus dimensionem, longitudinem scilicet: alteram postea adiungimus, nempe latitudinem, et superficiem consideramus: tandem tres dimensiones simul, hoc est, totam soliditatem complectimur. Hinc facile refellitur duplex censorum genus. Alii sunt sceptici, qui inconcussa matheseos theoremata labefactare conantur, eaque falsis hypothesibus, commentitiis nempe lineis et superficiebus innixa esse obganniunt. Alii sunt imperiti quidam physici, qui veritates geometricas veluti superfluis abstractionibus fundatas fastidiose traducunt. Ad hunc ipsum articulum referri potest celeberrima in scholis controversia de extensionis divisibilitate in infinitum. Haec quaestio nobis videtur *logoma-*

chia àliqua laborare, quod quidem in disputationibus plurimis persaepe contingit. Dum disputant philosophi de extensionis divisibilitate, vel rem intelligunt de extensione *abstracta* et *geometrica*, vel de extensione *physica*, et de qualibet materiae portione. Rursus autem divisibilitas illa vel est *geometrica*, hoc est, in qualibet extensione concipi possunt, et re vera exsistunt partes numero infinitae, vel divisibilitas illa est *physica* et *actualis* ita, ut extensio quaelibet in infinitum dividi possit. Hic est celeberrimae quaestionis status. Iam partes singulas explicabimus.

Schol. 11. Physicam et actualem extensionis divisibilitatem in infinitum locum habere non posse evidens est, quum experimentis certissimum sit, post certum divisionum numerum sensibus nostris evanescere omnino extensionis phaenomena ita, ut subtilissimis etiam organis sese subducat. Si quaestio sit de extensione physica et de qualibet materiae portione, iam tota res pendet ex philosophicis litibus, quae adhuc sunt sub iudice. Etenim quum ignota nobis sit intima corporum natura, certo adserere non possumus, corpora ex simplicissimis inextensisque particulis non esse composita. In hac autem opinione manifestum est, materiam non esse etiam abstractae in infinitum divisibilem. At si eam teneamus aliorum philosophorum sententiam, quae materiae por-

tionem quamlibet etiam minimam veluti continuam et extensam admittit; iam certum est, materiam esse in infinitum geometrice divisibilem. Itaque tota quaestio pendet ex corporis natura, quam quidem in ultimo physices articulo, quantum patitur rei obscuritas, meditabimur, nostramque ignorantiam fateri non dubitabimus. Interim sit

CONCLVSIO.

EXTENSIONEM QVAMLIBET GEOMETRICAM IN INFINITVM DIVISIBILEM ESSE, DEMONSTRATVR.

I. Extensio quaelibet geometrice considerata nullas habet partes determinatas. Quum enim tota extensionis geometricae notio in sola partium coëxsistentium coniunctione posita sit, indeterminatus omnino est partium illarum numerus, nec extensionis notionem ingredi debet. Itaque pro arbitrio adsumi potest partium numerus. Nempe fingere licet, in extensione aliqua contineri decem vel mille partes cet. prout pars aliqua pro unitate adhibetur. Ita linea aliqua duas continebit partes, si pars dimidia pro unitate habeatur, decem vel mille partes habet, si pars decima vel millesima usurpetur pro unitate. Quare quum unitas illa sit omnino indeterminata, indeterminatus etiam erit partium numerus,

quem proinde numerum in seriem infinitam abire concipi potest. Igitur extensio continua erit geometrice divisibilis in infinitum.

Hanc eamdem ratiocinationem in quali-bet corporum dimensione obtinere evidens est *. Et quidem corpus triplici dimensione praeditum suos habere debet limites atque terminos, alioqui finitum non foret atque determinatum. Igitur corpus habere debet reales limites, qui binas tantummodo habeant dimensiones in longum et latum. Etenim utcumque exigua profunditas adsumatur, eius pars interior ad terminum seu limitem pertinere non potest. Is autem terminus latitudine sola et longitudine praeditus dicitur *superficies*. Iam superficies quaevis finita suum habere debet terminum, qui simili argumento latitudine careat, et is dicitur *linea*. Eodem pacto lineae terminus erit *punctum* nulla extensione praeditum. Igitur superficies, linea, punctum non sunt materia, seu corpus, sed merae corporis adfectiones, quae sine ipso et per sese subsistere non possunt. Nempe haberi debent tamquam termini et limites materiae *reales* quidem. Neque a no-

* *Cave, ne corporis dimensionem, seu spatium, quo ipsum continetur, cum corpore ipso confundas. Quaestionem enim de corporis divisibilitate in infinitum consulto non resolvit Auctor.*

stra imaginandi vi pendet, quod dimensiones finitae terminum aliquem seu limitem habeant, qui ad ipsas non pertineat. Itaque nec superficies erit pars corporis, nec linea pars superficiei, nec punctum pars lineae, sed realis terminus. Nec proinde corpus repetitione et suprapositione superficiei, nec superficies repetitione lineae, nec linea repetitione puncti, sed ductu quodam continuo generabitur. Hinc statim patet, binas quasdam superficies vel in unicam coalescere et congruere, vel corpus aliquod triplici dimensione praeditum intercipere: binas lineas intercipere superficiem: bina puncta intercipere lineam. Nec ullam proinde superficiem superficiei, lineam lineae ita proximam esse, aut punctum puncto ita vicinum, ut nihil mediae distantiae intersit. Ita si corpus, quod continuum concipiatur et solidum, sectione quadam plana secetur; evidens est, alteram sectionem priori ita proximam fieri non posse, ut nihil corporis inter ipsas sit, sed nova sectio vel aliquid intercipiet, vel cum priore penitus congruet. Intervalli autem hujus medium aliquod erit, quod nimirum cum neutro extremo congruere potest, ne ipsa itidem extrema congruant intervallo omni sublato. Quare dimidii intervalli rursus haberi potest pars dimidia, et ita deinceps in infinitum, ac proinde habebitur necessario divisibilitas in infinitum.

II. Eamdem extensionis divisibilitatem in infinitum evincunt argumenta geometrica innumera. Infiniti numero duci possunt circuli, alii aliis maiores, qui eamdem rectam, et se invicem contingant in unico puncto, ideoque in infinitum dividere possunt illud intervallum, quod inter tangentem circulumque minimum intimum comprehenditur. Inter easdem parallelas duci possunt parallelogramma obliqua, alia aliis longiora in infinitum, exiguo utcumque parallelogrammo rectangulo aequalia. Ex longissimae cuiusvis lineae rectae divisionibus quotcumque agi possunt lineae ita, ut extremae transeant per extrema puncta rectae cuiusvis utcumque exiguae et priori parallelae, quam omnes secabunt in totidem aequales partes, quot partes illa longissima recta habebat, nec umquam exhaurietur exiguum illud intervallum, quod semper superest, nec rectae congruent. Alia eiusmodi sexcenta adhiberi solent, quae vim habent summam, et severam demonstrationem efformant pro spatii et extensionis divisibilitate. Si enim continua realisque extensio admittatur, iam superficies, linea, punctum non sunt mentis nostrae figmenta, sed realis extensionis reales termini. Nihil tamen ex geometria petitum evidentius faciliusque demonstrat extensionis divisibilitatem in infinitum, quam illud geometris notissimum, quod nempe datis binis rectis possit

semper inveniri tertia continue proportionalis post ipsas. Si enim adsumatur recta quaevis utcumque parva, tum alia utcumque magna, quae illam contineat vicibus quotcumque, semper invenietur tertia post hanc et illam, quam illa totidem vicibus contineat, ideoque continebit illa tot partes, quot libuerit: et quemadmodum nullus erit limes, ultra quem augeri non possit haec magna linea, ita nullus itidem erit, ultra quem illa tertia imminui non possit.

Haec quidem argumenta ex primis geometriae elementis desumta sunt. Sed iis quoque consulendum, qui rebus geometricis haud adsueti demonstrationum evidentiam facile non percipiunt. Quare libet argumentum unum physicum ex motu petitum proferre. Si extensum constaret ex indivisibilibus, aeque veloces forent motus omnes, nec minus spatium eodem tempore percurreret segnissima testudo, quam velocissimus cursor. Etenim non potest testudo minus spatium eodem temporis puncto percurrere. Indivisibile enim ponitur spatium temporis puncto indivisibili descriptum, ac proinde quum repugnet indivisibile alio indivisibili minus, spatium minus a testudine percurri repugnat. Quare spatium aequale describet. Idem dicendum de alio quovis tempore, ac proinde spatia aequalia ab utroque semper describentur, et cursor velocissimus non plus conficiet spa-

tii, quam testudo tardissima; quod est absurdum *. Plurima alia eiusdem generis absurda ex eadem indivisibilium hypothesi colliguntur. Verum quae dicta sunt, sufficiant. Ceterum evidens est, praecedentes demonstrationes valere etiam pro materiae divisibilitate, si materia continuam extensionem habere ponatur. Etenim singulis spatii partibus singulae respondebunt materiae partes, quae proinde non secus, ac spatium, erunt in infinitum divisibiles. Verum in hypothesi leibnitianorum et aliorum philosophorum (boschovichianorum) qui inextensa et simplicissima materiae puncta admittunt, iam materia neque abstracte erit divisibilis in infinitum, et ideo hanc nostram conclusionem de sola extensione enuntiavimus.

SOLVVNTVR OBIECTIONES.

Obiect. 1. Si extensio divisibilis esset in infinitum; in quovis extenso exsisteret numerus partium infinitus, quo posito maximum sequeretur absurdum. Nam si numerus partium infinitus in quovis extenso daretur, nullus haberi posset motus, ne quidem per mi-

* *Conferatur hoc argumentum Auctoris cum pervulgato Zenonis, de quo supra. Atque intelligetur Zenonis argumentantis scopus, qui non multum a praesenti diversus est.*

nimum spatium, quum in minimo spatio numerus partium sit infinitus; ergo extensio quaelibet non est divisibilis in infinitum. Resp. N. sequelam ant. et conseq. Quamvis numero infinitae sint spatii percurrendi partes, eaeque non nisi tempore aliquo a mobili percurri possint; illae tamen partes non sunt finitae magnitudinis, sed infinite parvae, hoc est, ut vocant, *infinitesimae*. Hinc, ut percurrantur, non egent tempore finito, sed tantum particula temporis infinite parva, nisi fingamus, mobilis celeritatem esse infinite exiguam. Ratio est, quia tempus non secus ac spatium dividi potest in partes multitudine infinitas et magnitudine infinite parvas. Itaque si mobilis celeritas finita sit, quaelibet infinite parva spatii particula in homologa temporis particula a mobili absolvetur, ac proinde totum adgregatum multitudinis infinitae particularum spatii, seu totum spatium finitum describetur a corpore in adgregato multitudinis infinitae tempusculorum infinite parvorum seu tempore finito. Quare falsum est, posita divisibilitate in infinitum, nullum haberi posse motum, ne quidem per minimum spatium, sive minimum spatium non nisi infinito tempore percurri posse. Quod ut magis declaretur, probe attendi debet iam antea fusius explicata temporis, motus spatiique analogia. Tres illae notiones ita necessario sunt coniunctae, ut una alteram indivulso nexu contineat. Nulla extensionis alicuius determinatae clara

idea haberi potest, nisi nobis exhibeamus mobilis alicuius velocitatem datum spatium dato tempore percurrentis. Et vice versa mobilis alicuius velocitatem clare intelligere non possumus, nisi ope spatii dato tempore descripti. Hinc fit, ut ex tribus temporis, velocitatis spatiique conditionibus, datis duabus, tertiam inveniant geometrae, ut explicavimus *in articulo de motu.*

Inst. 1. Si extensio contineat partes numero infinitas, infinitum contineretur in finito; extensio enim finita haberet partes multitudine infinitas; quod quidem absurdissimum est; ergo extensio geometrica non est divisibilis in infinitum. Resp. dist. ant. extensio finita contineret partes numero infinitas, sed infinite parvas, C. ant. partes numero infinitas et finitae magnitudinis, N. ant. Quare N. cons. Haec obiectio falsa laborat hypothesi, quod nempe quantitas aliqua ex partium numero tantum aestimari debeat; quum tamen certissimum sit, eam ex partium multitudine et magnitudine simul aestimandam esse. Igitur quantitas finita continere quidem non potest partes finitas numero infinitas; potest tamen dividi in partes numero infinitas et infinite parvas. Et quidem si partium magnitudo eadem ratione minuatur, qua earum numerus augetur, totum ex his omnibus partibus compositum idem manebit, ac proinde finitum erit, etiamsi partium numerus augeatur

in infinitum. Exempla plurima suppeditat arithmetica, fatentibus ipsis adversariis, ubi numerorum series est infinita, manente tamen summa seriei finita. Ita demonstrant arithmetici, seriem in infinitum continuatam $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}.\frac{1}{16}$ cet. unitati aequalem esse. At nemo negabit, seriem hanc infinitas partes habere. Verum ut huic argumento aliisque id genus plurimis paretur responsio, tollenda est omnis vocabuli ambiguitas. Dum extensionem in infinitum geometrice divisibilem esse demonstramus, quaestio minime est de *actuali* infinitae divisionis possibilitate. Hoc unum intelligi volumus, quamlibet extensionis parte minores alias concipi posse particulas. Atque hoc ipsum est, quod divisibilitas in infinitum appellari solet. Nomine enim infiniti venit id omne, cuius limites adsignari non possunt.

Inst. 2. Si extensio quaelibet finita dividi possit in partes numero infinitas, magnitudo quantumvis exigua in tot partes dividi poterit, ac quaelibet alia quantumvis maxima. Maxima itaque aequabitur minimae; immo omnes quotcumque magnitudines utcumque diversae, aequales erunt, utpote ex aequali partium numero, nempe infinito, constitutae. Quod quidem absurdum vitari non potest, nisi dicatur, magnitudines esse infinitas alias aliis maiores; hic autem infinitus

infinitorum ordo a ratione omnino alienus videtur; ergo quocumque se vertant huius opinionis patroni, multis sese implicant ambagibus et absurdis. Resp. N. ant. et cons, Responsio ad primam obiectionis partem patet ex responsione praecedenti. ¿ Etenim quodnam est absurdum, duas magnitudines inaequales in eumdem partium numerum dividi? ¿ An quia partes sunt numero aequales, composita sunt aequalia? Si hoc verum esset, verum itidem foret, pedem digito aequari; pes enim non secus ac digitus in duodecim partes dividitur. Quod spectat ad alteram obiectionis partem, diversum nempe infinitorum ordinem, res est difficilior. Vt autem haec obiectio et tota simul quaestio in bono lumine collocetur, sublimem quantitatum infinitarum et infinitesimarum doctrinam, quantum per harum institutionum praescriptam facilitatem nobis facere licet, explicabimus.

Quantitatum infinite parvarum nomen hactenus adhibuimus. Verum id fecimus brevitatis causa, et ut receptum servaremus loquendi usum. Et quidem nulla quantitas in se spectata et sine nostro cogitandi modo, aut infinite parva est, aut infinite magna, sed in se determinata est et finita. Quod facile patet ex demonstratis de extensionis divisibilitate. Et certe data quavis magnitudine utcumque parva vel utcumque magna, alia

semper minor in primo casu, et alia semper maior in casu altero haberi potest. Nobis enim licet quantitatem exiguam vel ingentem considerare, primamque minuere, alteram augere, abstrahendo animum a quovis limite determinato. Priorem quantitatem dicimus *infinitesimam* vel *infinite parvam*, quantitatem alteram appellamus *infinitam* vel *infinite magnam*, accipiendo infinitum pro indefinito, quod diligenter notandum est; quum infinitum nusquam sit in rebus, sed in nostro concipiendi modo. *Finitam* dicimus quantitatem quamvis, quae vel non concipitur variabilis; vel si concipiatur variabilis, dum ultra quosdam determinatos limites variata non consideratur. Rationem, quam duae quantitates finitae habent ad se invicem, *rationem finitam* vocamus. Vnam e quantitatibus, quae imminutae concipiuntur ultra quoscumque limites, et *ad arbitrium adsumtam*, dicimus infinitesimam *primi ordinis*. Si sit quantitas alia, quae ad hanc infinitesimam habeat rationem, quam ipsa infinitesima habet ad quantitatem finitam, quantitatem illam dicimus infinitesimam *secundi ordinis*, et ita deinceps. Vice versa, si quaedam quantitas sit ad finitam quantitatem, ut haec ad infinitesimam primi ordinis, eam dicimus infinitam *primi ordinis*; et eodem pacto superiores infinitorum ordines definimus. Hae autem quantitatum infini-

tesimarum notiones sunt omnino distinctae.

His explicatis, iam patet, diversos esse infinitorum et infinitesimorum ordines. Nam circuli diameter, quae finita est, se habet semper ad chordam, ut est chorda ipsa ad abscissam; ac proinde si in circulo fingatur chorda infinite parva primi ordinis, erit abscissa infinitesima ordinis secundi. Si autem chorda sit infinitesima ordinis secundi, erit abscissa infinitesima ordinis tertii: si chorda sit infinitesima ordinis tertii, erit abscissa infinitesima ordinis quarti, et ita deinceps. Itaque ex infinitesimis primi ordinis statim derivari evidens est quantitates infinitesimas aliorum ordinum, ac proinde etiam varios infinitorum ordines. Hinc non satis claram huius doctrinae cognitionem habuisse videtur D. Niwentit, qui concessis infinitesimis primi ordinis, alios infinitesimorum ordines reiecit. Id ergo probe recordandum est, infinite parvas et infinite magnas quantitates a nobis quidem admitti, sed in eo dumtaxat sensu, quod quantitates illae sint indefinitae, hoc est, ut augeri vel minui concipiantur ultra quoscumque limites. Constituta autem talium quantitatum definitione accurata, alteri obiectionis parti satisfactum est, atque etiam aliis obiectionibus plurimis, quae ex quantitatum illarum natura non satis explicata desumi solent.

Superest, ut de earumdem quantitatum

usu, quem quidem in nostra physica aliquando usurpavimus, breviter aliquid adiungamus. Vsus omnis positus est in comparandis inter se quantitatibus finitis, earumque rationibus et adfectionibus determinandis. Si comparatis inter se binis quantitatibus finitis negligantur differentiae, quae earumdem quantitatum respectu sunt infinite parvae, vera aequalitas haberi debet, nec ullus, ne infinitesimus quidem error, committi potest. Etenim finitae quantitates dicuntur illae, quae sunt in se determinatae; infinite autem parvae eae vocantur, quae concipiuntur minui ad arbitrium ultra quoscumque limites in se determinatos. Porro iis neglectis quantitatibus, nullus error ne quidem infinitesimus oriri potest. Si enim inaequales essent finitae quantitates illae, haberent differentiam aliquam in se determinatam. Quoniam autem quantitates infinitesimae minui possunt ultra quoscumque limites in se determinatos; omnes simul poterunt esse minores differentia qualibet determinata. Itaque minus accurate loquuntur aliqui, dum dicunt, negligi posse quantitates infinite parvas, quia error est infinite parvus; re vera enim nullus est. Igitur tota res huc reducitur, ut nempe ad demonstrandam duarum quantitatum aequalitatem ostendatur, differentiam esse adsignabili qualibet differentia minorem. Hanc autem methodum accuratissimam omnino esse

nullique errori obnoxiam, evidens est. Tota enim pendet ex hoc Euclidis theoremate, nempe: *quantitates duae sunt aequales, si differentia sit quantitate qualibet adsignabili minor.* Etenim si forent inaequales, differentia posset adsignari; quod est contra hypothesim. His fundamentis innititur calculus *infinitesimalis*, qui *primarum* et *ultimarum rationum* vel etiam *limitum* calculus cum Newtono rectius appellari potest.

ARTICVLVS III.

De figurabilitate.

DEFINITIO I.

Figurabilitas appellatur: *illa corporum proprietas, qua fit, ut externa illorum superficies in longum, latum et profundum certo modo extendatur atque terminetur.*

Intricatissimae a philosophis proponi solent quaestiones duae: I.a est: an minimae elementares particulae, ex quibus corpora componuntur, perpetuam ac determinatam habeant figuram, quae nulla naturae vi frangi possit: II.a autem est: an corpora per diversam minimarum particularum naturam specie distinguantur; an per solam earumdem particularum dispositionem. Sed quidquid sit de illis duabus quaestionibus specia-

li concluſione mox explicandis, ſit

Prop. 1. CORPORA IN TENVITATEM IMMANEM REDVCI POSSE, VTILISSIMIS EXPERIMENTIS DEMONSTRATVR.

Prob. Auri ductilitatem fere incredibilem contemplemur, et ad calculum revocemus. Aurum malleo tunditur, et in lamellas extenditur. Pes cubicus auri pondus habet librarum 1349, ſeu unciarum 21584; nam 16 unciae libram pariſienſem conſtituunt. Iam vero linea eamdem habet rationem ad pedem, quam habet 1 ad 144. Quare ſi numeri ad potentiam cubicam evehantur, erit linea cubica ad pedem cubicum, ut 1 ad 2985984, hoc eſt, pes cubicus lineas cubicas 2985984 continet; ſed pes cubicus auri pondus habet unciarum 21584; ergo ſi per hunc numerum antecedens numerus dividatur, quotus $138 + \frac{7392}{1585}$ exprimet, quot lineas cubicas uncia auri comprehendat. Iam ſi ex uncia auri formetur cubus, illius latus ſeu altitudo erit $5 + \frac{1}{6}$. Haec enim eſt radix cubica numeri praecedentis quam proxime. Quare ſi numerus hic in ſe ipſum ducatur, erit baſis cubi $26 + \frac{25}{36}$ linearum

quadratarum. Praeterea sciendum est, artifices, qui aurum tundunt, ac in tenues lamellas extendunt, unciam auri ita attenuare et in tam amplam redigere laminam, ut ex illa commode ducant 2730 bracteas, quarum latera quaquaversum sunt linearum 34, neglectis segminibus, quae tamen sunt ponderis dimidii. Iam si bractearum latera sunt 34. lin. erunt in bractea qualibet lineae quadratae 1156; ita ut, si bracteae omnes in unam denuo coëant superficiem, habeatur superficies linearum quadratarum 3155880, cui numero si vel tertia pars pro segminibus addatur, id est, si addas 1051960, patet, opifices ex unica auri uncia efficere 4207840 lineas quadratas visibiles; sed huius superficiei amplitudo nempe linearum quadratarum 4207840 continet basim istius cubi, nempe $26 + \frac{25}{36}$, vicibus 159092, ergo uncia auri efformata in cubum $5 + \frac{1}{6}$ lineas altum, dividitur in lamellas quadratas 159092. Porro quodlibet lineae quadratae latus instrumenti acuti mucrone in 6 saltem partes dividitur, ac proinde integra quadrata linea in partes 36. Quare si numerus linearum quadratarum 4207840 multiplicetur per 36, nempe per numerum partium in quavis linea facile visibilium; productum 151482240 exprimet numerum partium, quae in unica au-

ri uncia conspici possunt. Quod prorsus mirum videbitur.

II. Sed longe maior apparet auri ductilitas, si tenuissimae aureae lamellae argentum ac filum sericum circumvestientis crassitudo examinetur. Artifices massam argenteam sumunt ponderis 8 libr. quam componunt in cylindricam figuram, altitudinis duorum pedum cum digitis 8 seu lin. 384, cuius peripheria est 2 dig. cum lin. 9. seu 35. lin. quae si ducatur in altitudinem cylindri, superficies prodibit 13440. lin. quadr. Superficiem huiusmodi aureis bracteis obducunt, quarum pondus semiunciam adaequat. Tum cylindrum sic inauratum per diversa laminae chalybeae foramina traiiciunt et massam illam ita extendunt, ut capillarem subtilitatem imitetur, et in ipsa tamen superficie inaurata maneat, atque hinc massa cylindrica in tenuissimum filum traducitur, cuius fili pondus grana 36 adaequat: in 150 pedes extenditur, ac proinde totus cylindrus in filum 307200 pedes longum extendi poterit. Redigatur enim cylindri pondus in grana; libra gallica 16 uncias continet, haec drachmas 8, drachma 3 scrupulos, hic 2 obolos, obolus 12 grana. Pondus ergo 8 libr. continebit grana 73728. Itaque ad habendam longitudinem, ad quam totus cylindrus produci potest, dicatur 36 : 150 = 73728 ad quartum proportionalem 307200. Atque haec

erit longitudo tenuissimi fili. Ergo semiuncia auri in tot visibiles partes distribui potest, quot lineas complectuntur pedes 307200, nempe 44236800 lineas; sed linea in 6 visibiles partes ad minimum dividi potest. Quare si 44236800 numerus linearum, quae in 307200 continentur, in 6 ducatur; numerus 265420800 designabit partes visibiles in dimidia auri uncia. Verum postquam filum per angustissimum laminae chalybeae foramen traiectum est, inter duas rotas chalybeas laevigatissimas complanatur, et cylindrus in binas planities parallelogrammas reducitur. Ac proinde numerus partium quadruplo maior distingui poterit in tenuissima lamella, quae tamen semper continua et inaurata apparet. Itaque numerus partium in auri semiuncia oculo inermi conspicuarum erit 1061683200. Postquam massa cylindrica in praedictam longitudinem exporrecta est, tenuissimam adquirit crassitudinem ita, ut illius diameter vix aequalis sit crassitudini auri longissimam argenteam lamellam vestientis, quae quidem crassitudo a clariss. Reaumurio statuitur non maior $\frac{1}{274881}$ lineae. Immo si consideremus, auri bracteas non ubique eiusdem crassitudinis, sed in aliquibus locis duplo graciliores apparere; crassitudo auri argenteam lamellam obducentis in quibusdam partibus ma-

ior non erit $\frac{1}{100000}$ unius lineae. Quae quidem crassitudo minor adhuc fieri poterit, si argentea lamina sic inaurata rotis diligentius fuerit subacta. Rem longius describere, et calculi apparatum subiicere placuit, ob mirandam omnino et stupendam artis subtilitatem.

III. Quamvis tanta non sit vitri ductilitas, haec tamen philosophorum meditationibus dignissima est, et artificum laboribus aliquando fortasse perficienda. Notissimum est artificium, quo vitrum in longissima subtilissimaque fila protrahi solet. Vitri frustulum flammae admovetur, vi ignis subigitur, et in mollem veluti ceram redigitur. Quo facto, uncinus vitreus fuso vitro adhibetur, et deinde retrahitur; uncino autem retracto abducitur filum vitreum massae vitreae perpetuo adhaerescens: filum illud uncino interceptum rotae circumponitur, et rota rapidissime pro arbitrio circumagitur, atque fila vitrea ipsam rotae circumferentiam perpetuo amplectuntur. Tanta autem aliquando obtinetur filorum subtilitas, ut araneae telae tenuitatem aemulentur. Observavit clarissimus Reaumurius, cum filorum tenuitate ipsam quoque flexibilitatem crescere ita, ut vitrea fila ad maiorem subtilitatis gradum perducta pannos atque hominibus vestimenta praebere possent. Huius utilitatis specimen aliquod videre li-

cet in puerilibus ornamentis ex mobili vitreorum filorum fasciculo contextis. Talia enim ornamenta capiti imposita capillorum instar flectuntur, nec franguntur aëris motu agitata. Plurima alia experimenta legi possunt in vulgaribus physicorum libris, qui omnium manibus teruntur.

IV. Admiranda plane est materiae subtilitas, ad quam ars pervenire potuit. Sed longe maior est, et omnem imaginandi vim superat particularum tenuitas, quam in corporibus nonnullis ipsa natura demonstrat. Lucis radios, corporaque odorifera iterum contemplari satis esset. Sed iucundissimum argumentum alio exemplo illustrare non abs re erit. Solertissimus naturae indagator Leewenhoëkius in aqua per aliquot dies adservata exquisiti microscopii ope minima observavit animalcula, quorum mille centena millia vulgaris arenae globuli magnitudinem non excedunt. Iam quum animalculum quodvis sit corpus organicum, perpendamus paulisper, quam delicatulae et subtiles esse debent partes ad ipsum constituendum et ad vitalem actionem conservandam necessariae. Haud facile concipitur, quo pacto in tan angusto spatiolo comprehendi possint cor, quod vitae fons est, musculi ad motum necessarii, glandulae ad licores secernendos, ventriculus et intestina ad alimenta dirigenda, et alia membra innumera, sine quibus animal

esse non potest. Praeterea quum singula memorata membra sint etiam corpora organica, aliis carere non possunt partibus ad suas actiones necessariis. Constabunt ergo ex fibris, membranulis, tunicis, venis, arteriis, nervis et his similibus canaliculis numero fere infinitis, quorum exilitas imaginationis vires longe superat. At his infinite propemodum minores esse debent partes fluidi, quod per canaliculos decurrit, nempe sanguis, lympha et spiritus animales, quorum in grandioribus animalibus incredibilis est subtilitas. ¡En quanta in vilissimo animalculo portenta, divinaeque omnipotentiae argumenta! Ex tanta et fere infinita *actuali* materiae divisione evidens omnino fit, praeiudicatis vulgi opinionibus longe differre mundi huius structuram. Sibi facile persuadet imperitum vulgus, corpora magnam continere materiae quantitatem, illorumque partes singulas stricte continüas esse; quum tamen certissimum sit, corpora etiam compactissima exiguam omnino et fere nullam habere materiae portionem, eamque in tenuitatem incomprehensibilem esse divisam.

V. Neque heic praetermittendum est eximium problema, quod analytice solvit clariss. Keillius in institutionibus astronomicis.

Problema: DATA VTCVMQVE EXIGVA MATERIAE PARTICVLA, EAM PER SPATIVM

VTCVMQVE MAGNVM ITA DISTRIBVERE, VT NVSQVAM HABEATVR SPATIOLVM VACVVM MAIVS DATA MENSVRA VTCVMQVE EXIGVA.

Facili ratiocinatione rem intelligere licebit. Fingamus, pollicem cubicum materiae solidae in sphaeram cavam ad saturnum usque extendi. Quod certe non repugnat, quum materia sit in infinitum divisibilis. Haec autem sphaera exiguam habet crassitudinem, omnino tamen solidam. Iam sphaera ad minima intervalla minimisque poris pertusa fingatur ita, ut pororum distantia et magnitudo datam mensuram utcumque exiguam non excedant. Tum ex decidua materia, quae poros antea occupabat, componatur iterum sphaera; quae priori sphaerae sit quamproxime contigua. Haec autem secunda sphaera minimis poris rursus perforata intelligatur; atque ex materiae ramentis tertia fiat sphaera, et ita deinceps. Manifestum est, hoc modo obtineri posse sphaeram integram ex aliis sphaeris ita compositam, ut eadem maneant phaenomena, quae in praesenti huius mundi structura cernimus, eademque servetur apparens corporum continuitas. Iam vero ad propositas quaestiones duas redeamus. Quum itaque corpora quaevis corporumque partes naturae artisque viribus in minima corpuscula dissolvantur; a philosophis quaesitum est, num

primigeniae corporum particulae certos habeant limites ita, ut perpetuam servent figuram, atque ex sola homogenearum particularum coniunctione variaque dispositione repetenda sit diversa corporum natura vel species. His praemissis sit

CONCLVSIO.

De perfecta minimarvm particvlarvm dvritie diversaqve illarvm natvra nihil adfirmandvm videtvr.

Prob. 1. pars. Nihil certo adfirmare licet de illis quaestionibus philosophicis, quae nulla observatione, nullo experimento, nullaque satis valida ratiocinatione probari possunt; atqui ita se habet quaestio de minimarum particularum duritie atque figura; ergo de his nihil certo adfirmare licet. Prob. min. quod spectat ad observationes et experimenta, res est evidens, quum minimae etiam corporum particulae, quae ab elementorum tenuitate, si quam habent, longissime distant, nullis observationibus vel experimentis subiici possint. Neque etiam metaphysicis rationibus quidquam evinci potest. Re quidem vera nullum corpus perfecte durum in hac rerum universitate novimus: durissima quaeque corpora in pulverem franguntur: ex silicibus ipsoque adamante fumum exprimunt solares

radii in speculi ustorii foco collecti. Sed ¿ quid inde concludi poterit de primigeniis corporum elementis? Nihil sane. Neque falsa demonstrari potest eorum philosophorum hypothesis, quae simplicissima materiae elementa atque inextensa admittit, ut iam observavimus, et in sequenti articulo fusius explicabimus. Nec etiam invicte refelli possunt contrariae opinionis patroni. Quod enim de continuitatis lege proferri solet, demonstrationis vim non habere, ex obiectionum serie manifestum fiet.

Prob. 2. pars, quae ex prima omnino pendet. Et quidem si nos lateat, utrum elementa sint simplicissima, an extensa: utrum sint perfecte dura, an artis et naturae viribus divisibilia, multo minus de elementorum natura aliquid pronuntiare licet. AEque felici successu per diversam elementorum naturam vel per diversam elementorum similium dispositionem explicari posse videntur diversae corporum species. Et quidem mirum est, quantam specierum varietatem induant corporum partes variis motibus vexatae atque mutatae. Ad hoc argumentum referuntur, quae diximus in appendice ad caput tertium, atque de eadem re nonnulla adiungemus in obiectionibus. His rationibus inductus Cartesius dicere ausus est: *da mihi materiam et motum, mundumque componam.* Heic autem data occasione, depellenda est

coniecta in Cartesium calumnia, qua nulla gravior esse potest. Dum haec verba protulit Cartesius, materiae creationem et supremi motoris necessitatem infitiatus non est magnus ille philosophus, sed nihil aliud significare voluit, nisi supremum rerum omnium auctorem figura dumtaxat et motu usum fuisse ad diversas corporum species distinguendas. Quod quidem breviter observatum volui, ut a falsis criminationibus religiose abstineant auditores nostri ad pietatem magis quam ad scientias instruendi.

SOLVVNTVR OBIECTIONES.

Obiect. adversus primam partem. Physicis notissima est lex *continuitatis*, qua iubetur, nihil in rerum natura fieri per *saltum* ita, ut corpus ex aliquo statu ad alium transire non possit, nisi omnes percurrat status intermedios. Vi huius legis corpus e motu ad quietem statim transire non potest, nisi singulos velocitatis decrescentis gradus traiiciat. At si aliqua sint corpora perfecte dura, iam violatur lex illa. Etenim si corpora duo perfecte dura aequali motus quantitate in partes contrarias sibi invicem occurrant; ambo post conflictum statim quiescunt. Si autem inaequalis fuerit motuum quantitas, corpus quod minorem habet velocitatem, directionem statim mutat, ut patet ex demon-

stratis conflictuum legibus. Vnde sic argumentantur: exsistere repugnat corpora illa, quibus admissis violatur lex continuitatis; atqui haec lex violatur, si admittantur corpuscula minima perfecte dura; ergo minimae particulae perfectae durae esse non possunt. Resp. N. mai. lex continuitatis tota innititur principio rationis sufficientis. Sic enim ratiocinari solent, qui hanc tuentur legem: status, in quo reperitur ens aliquod, suam habere debet rationem sufficientem, cur in tali statu exsistat potius, quam in alio. Haec autem ratio contineri non potest nisi in statu antecedenti. Igitur status antecedens continebat aliquid, ex quo natus est status subsequens, illi nempe duo status ita sunt inter se coniuncti, ut nullus possibilis sit status intermedius. Si enim inter statum praecedentem et antecedentem aliquis foret status possibilis, primum statum natura mutasset nondum a secundo statu determinata, ac proinde sine ratione sufficiente. Haec est vulgata apud leibnitianos ratiocinatio. Verum de principio rationis sufficientis saepe sermonem habuimus, illudque ita explicavimus, ut in praesenti casu minime valere possit. Itaque lex continuitatis huic principio innixa tamquam universalis naturae lex demonstrari non potest. Quidquid sit de lege illa in magnis corporibus observata, eamdem in minimis corporum elementis vigere, nequaquam evin-

eunt instituta in magnis corporibus experimenta, nisi ostendatur, ex ipsa corporum natura continuitatis legem profluere, quod certe nemo adfirmaverit *.

Quamvis autem perfecta elementorum durities nullo satis valido refelli possit argumento, hanc tamen ad intelligendam et explicandam specierum varietatem minime necessariam esse credimus. Neque enim vim maximam habere videntur haec, quae vulgo adferri solent, nempe: natura semper est uniformis: ex iisdem seminibus eaedem oriuntur plantae, eadem nascuntur animalia: novae non generantur corporum species. Porro, inquiunt newtoniani, si dura non sint materiae elementa, iam vehementissimis frequentissimisque natura motibus iactata perpetuo frangerentur. Hinc minimae corporum particulae modo subtiliores, modo crassiores factae, modo duriores, modo molliores varias constituerent species, naturaque universa faciem perpetuo mutaret. His autem rationibus haec in promtu esse potest responsio: ad

* *Admissa etiam continuitatis lege, explicare pronum est exempla in argumentatione adducta, si vires repulsivae in minimis a contactu distantiis agere ponantur in ratione quavis inversa distantiarum, uti adserunt boschovichiani, quibus haec obiectio nulla est, concessa etiam continuitatis lege.*

servandam specierum uniformitatem satis esset, minima materiae elementa nullis frangi viribus *actu* exsistentibus, quamvis tamen maioribus viribus superari possent. Praeterea elementa illa viribus licet naturae frangenda, suam tamen servare possent propriam unicuique speciei naturam. Itaque argumentum illud ponit, quod est in quaestione, nempe specierum diversitatem ex sola partium dispositione pendere; quam quidem hypothesim mox expendemus.

Obiect. adversus secundam partem. Per diversam similium particularum coagmentationem et dispositionem simplicius atque elegantius explicatur specifica corporum diversitas. Et quidem infinita propemodum varietate formam speciemque mutat eadem materiae portio. Sic metalla liquantur, ignis vi dissolvuntur: corpora fluida imitantur: in minutissimum cinerem rediguntur: in alia transeunt corpora, variasque constituunt species. Hanc sententiam confirmare videntur colorati lucis radii prismata vitreo separati. Ii enim nullam coloris diversitatem induunt. Quare minima lucis corpuscula, quae coloratum radium constituunt, sibi sunt simillima. Ex sola partium dispositione fit, ut corpora certos colorum radios reflectant, propriumque colorem exhibeant. His positis sic ratiocinantur plerique physici: tenenda est sententia illa, quae divinae simplicitati magis est consentanea, et

innumeris experimentis confirmatur; atqui simplicissima esse sibique perfecte similia materiae elementa, ex analogia naturae et experimentis constat; ergo minimae materiae corpuscula diversa inter se non sunt. Resp. N. min. Quamvis infinita sit Dei simplicitas, perfectissimusque illius operandi modus; exigui tamen ponderis aestimari debent argumenta, quae inde promere solent philosophi, qui divinorum operum simplicitatem atque perfectionem ex limitato atque imperfectissimo nostro intelligendi modo metiri praesumunt. Etenim quae nobis videntur composita, simplicissima omnino sunt Deo, qui omnia unico et simplicissimo intellectus actu cognoscit, itemque unico et simplicissimo voluntatis actu decernit atque exsequitur.

Quod ad reliquas spectat obiectionis partes, certum quidem est, ex varia partium dispositione pendere plurimas *sensibiles* corporum species. Verum quaestio non est de corporum *massis*, sed de minimis *moleculis*, quae *elementa* solent appellari. Itaque mixtae corporum species mutantur quidem, si naturae vel artis viribus separari vel adgregari possint componentes particulae. Verum diligentissimis experimentis compertum est, immutatas manere corporum species nonnullas, etiamsi vehementius torqueantur, variisque modis utcumque vexentur. Ita ex puriori aqua nihil nisi aquam, ex igne nihil nisi ignem

elicere valent chymici. Porro etiamsi corpora omnia, quae chymicis physicisque experimentis agitari possunt, in varias transirent species, ad minimas corporum moleculas trahi non possunt experimenta illa. Id ergo multo minus facere licebit, si corporibus quibusdam nulla mutatio vi etiam maxima inferri possit. Quod autem de diversis colorum radiis in obiectione adiungitur, hoc unum probat, pro varia corporum textura variaque partium dispositione diversos reflecti colorum radios: at inde minime colligitur, simillima esse radiorum corpuscula. Prolixiori responsioni non est heic locus, quum ad colorum doctrinam ea pertineat. Ceterum licet in tota hac responsione de materiae *homogeneitate* nihil adfirmare velimus, haud potiori iure pronuntiant aliqui philosophi, nulla esse ne quidem duo simillima materiae elementa. Tali ratiocinatione suam conantur probare opinionem, quam *principium indiscernibilium* appellant, leibnitiani. Si duae sint perfecte similes materiae portiones ita, ut una alteri substitui possit; *ceteris paribus*, iam nulla est ratio, cur haec vel illa hunc vel illum locum occupet, quum ambae eumdem locum occupare potuerint; id vero repugnare, aiunt, rationis sufficientis principio. At quum hoc principium ita generatim explicatum saepe saepius a nobis reiectum fuerit, et valide confutatam, non est, quod refellendo

indiscernibilium principio diutius immoremur.

Coroll. Ex hactenus dictis intelligitur, quid sentiendum sit de pervulgatis apud nonnullos philosophos corporum elementis. Aristoteles quattuor enumerat corporum elementa, *terram*, nempe, *aquam*, *ignem* et *aërem*. Ex his autem mixta omnia componi docuit: et re quidem ipsa, ex omnibus fere mixtis haec quattuor corpora vel horum aliqua eliciunt chymici. At patet, elementa illa esse sensibilia dumtaxat corporum principia; minime vero tamquam primigenia elementa considerari posse. Idem dicendum est de chymicorum elementis. Corpus in elementa sua resolvendum, exempli causa *vinum*, in clibanum mittunt, subiectoque igne quasdam partes solvunt in vapores, qui frigore addensati alio vase excipiuntur, fiuntque licor acuti saporis, quem *mercurium*, *spiritum* seu *aquam vitae* appellant. Deinde continuato igne liquorem saporis expertem exprimunt, quem *phlegma* vocant; idque facere pergunt, donec glutinosa tantum materia, *mellis* instar, in clibano supersit. Materiam illam glutinosam in ampullam retortam iniiciunt, et subiecto igne, *phlegma*, ut prius, exprimunt: postea liquorem acidum, quem iterum *mercurium* dicunt: deinde liquorem alium minus fluentem in modum olei, ignique concipiendo aptum, quem *sulphur* nominant. Postremo quod in ampulla retorta superest

comburunt; eiusque cineres in cymbium fictile immittunt, admixta aquae portione; quae quum brevi tempore salis saporem referat, percolando purgatur, remanetque in cymbio fictili pulverulenta quaedam et expers saporis terra, quam *caput mortuum* seu *terram damnatam* appellant. Aqua autem limpida alio vase excepta lento igne in vapores solvitur, tumque in fundo vasis superest corpus durum et *friabile*, salis speciem referens, quod ideo *salem* dicunt. Haec quinque elementa ex vino aliisque corporibus pluribus eruunt chymici. Ex corporibus aliis horum elementorum aliqua dumtaxat educunt. Hinc ex illis elementis varie permixtis omnem oriri corporum varietatem, sibi facile persuadent.

His elementis tria alia substituit Cartesius, qui rem totam hoc modo explicavit, seu potius implicavit. Deus creavit materiam homogeneam: hanc divisit in particulas proxime aequales, tali scilicet modo, ut earum anguli spatium accurate replerent, puta, in partes cubicas. Creatam et divisam materiam Deus moveri iussit ea motus quantitate, quam etiam num eamdem invariatamque in corporibus perseverare, fingit Cartesius. Hoc autem motu factum esse, ait, ut omnes materiae partes circa centrum commune et singulae circa proprium revolverentur. Ex hac rotatione mutuoque partium conflictu angulos abra-

di oportuit, indeque duo prodierunt elementorum genera; aliud nempe fuit pulvis tenuissimus et agitatissimus, quem materiam *aehteream* vocant cartesiani. Aliud autem emersit ex attritis factisque partibus, sed crassiusculis et ad motum minus idoneis. Tandem partes cubicae abrasis angulis abierunt in sphaeras ad motum maxime accommodatas. Ex his tribus elementis universum dicunt compositum. Et quidem materia subtilis solem praesertim constituit nostri systematis planetarii centrum. Secundum elementum constans ex attritis particulis et in rotunditatem conformatis, *globulosa* materia dicitur, spatiisque coelestibus replendis destinatur. Tertium denique elementum componit globum terraqueum ceterosque planetas. At materia *subtilis* sive *aetherea* illa est, quae replendis omnibus interstitiis sese citissime accommodat. At hoc modo philosophari fabulari omnino est. Atque hinc factum est, ut hoc cartesiani systematis commentum reiiciant severiores cartesianae physicae reformatores. Quod autem spectat ad materiam aethercam in tota physices serie de ea iam plura diximus. Quia vero materia illa sub sensus cadere non potest; mirum non est, quod de huius materiae natura et proprietatibus tot hypotheses proferant philosophi, qui coniecturis delectantur. Sed de huius materiae usu vel potius abusu sermo deinde sae-

pius recurret in physica particulari. Ceterum quod in hac quaestione, prolixius quidem tractari solita rerumque physicarum copiosissima, brevius egerimus, nemo nos tamquam iusto breviores reprehendat. Brevissimas enim curtissimasque esse nostras hac in re cognitiones, ingenue fatemur.

ARTICVLVS IV.

De corporis natura.

DEFINITIO I.

Quum de universalibus corporum proprietatibus in universa physica generali hactenus disputatum sit; hinc doctrinae ordo postulat, ut celeberrimam de corporis natura sive essentia quaestionem adgrediamur, atque tandem primae physices parti finem imponamus. Heic autem caveri maxime debet vocum ambiguitas. Observavimus iam in metaphysica, duplicem esse *essentiae* significationem. Vel enim essentia est realis, hoc est, primarium illud attributum, ex quo derivari possunt alia omnia attributa, quam quidem essentiam nobis ignotam esse demonstravimus; vel essentia est *nominalis*, collectio nempe omnium attributorum, quae in re aliqua observantur. Rursus autem attributa vel sunt *essentialia* vel *accidentalia* duntaxat. Haec

autem duo probe distinguenda sunt. Fieri enim potest, ut attributa quaedam in omnibus corporibus deprehendantur, quae tamen ad ipsam corporum naturam non pertineant, sed pro mera naturae lege haberi debeant. His praemissis, quae quidem in metaphysica atque etiam in logica accurate explicavimus, iam *corpus* sive *materiam* definire licet: substantiam *sensibilem*, quae explicatas in physica generali proprietates habet. Illas autem proprietates uno, ut ita dicam, oculi ictu contemplari, iterumque revocare operae pretium est.

Schol. 1. In praecedenti definitione notandum est diligenter, corpus dici *substantiam sensibilem*. Heic enim consideramus tantum corpus *physicum*, nihilque de simplicissimis et inextensis materiae elementis adfirmare audemus. Et quidem si elementorum naturam investigantes, ea extensa esse dicamus, nihil prorsus dictum videtur. Rursus enim elementa illa alias haberent partes, aliaque elementa. Si autem ea extensa non esse dicamus, res videtur absurda. ¿Qui enim intelligi potest, id, quod extensum non est, extensionem aliquam constituere? Respondere quidem potest leibnitianus, extensionem veluti *phaenomenon* habendam esse. Verum hypothesis illa, de qua frequens mentio iam antea incidit, precaria omnino est, totaque innixa sufficientis rationis principio, quod saepe saepius impugnavimus. Alii autem,

et quidem percelebres viri (boschovichiani) corporis nomine intelligunt punctorum systema pro diversis viribus attractivis et repulsivis per varia spatii *realis* loca ad diversas distantias dispositum, ut antea explicavimus. In hac scilicet opinione nullus est contactus *immediatus:* nulla *continuitas* vera et accurata, sed *relativa* dumtaxat et *apparens*. Et certe a nobis persaepe creditur continuitas vera, quae proculdubio est apparens. Si enim corpora quaedam ad talem inter se distantiam continuata sint, ut sub angulo 16″ minori videantur; in corpus unicum perfecteque continuum coalescere oculis apparent.

Verum haec opinio tota fundatur in ipsa continuitatis lege, quam quidem in omnibus corporibus et in minimis materiae elementis accurate demonstratam esse, nemo adfirmabit. Quae quum ita sint, praesens quaestio difficultatis et *periculosae plena aleae* nobis videtur. Quare ab ullo hac in re iudicio nobis abstinendum esse, existimamus, subtilioremque controversiam sagacioribus ingeniis relinquimus. Vnum observare satis erit, nihil omnino esse in his opinionibus, quod fidei vel leviter contrarium reprehendi possit. Inter animas et corpora essentiale et internum semper manebit discrimen, in his duobus positum, quod materia sit sensibilis, et cogitationis ac voluntatis incapax; at spiritus neque sensus nostros adficiunt, atque possunt cogitare et velle. Nec quis sibi persua-

deat, metaphysicis detrahi desumtum ex materiae extensione argumentum, quo scilicet validissime probant, materiam cogitare non posse. Totam enim vim retinet argumentum, etiamsi corpus physicum constet ex simplicissimis et inextensis elementis. Si autem elementa coniuncta cogitare non possint, ea quoque seorsum cogitare rèpugnat. Haec autem omnia comparari debent cum iis, quae de animae spiritualitate in metaphysicis institutionibus fuse et magno rationum pondere explicavimus.

Schol. II. Iisdem fere difficultatibus obnoxia est gravissima alia de *impenetrabilitate* controversia, an scilicet ad corporis essentiam proprietas illa pertineat. Et quidem si impenetrabilitas inter essentiales corporis proprietates numerari non debeat; iam nihil absurdi videtur, quod plures corporis partes eumdem occupent locum. Id quidem praeter universales naturae leges et corporum omnium proprietates, ac proinde non sine miraculo contingeret; at immutabili corporum essentiae minime repugnaret. Simili ratione si admittantur in minimis et simplicissimis materiae elementis vires quaedam ad certos limites repulsivae, ex quibus oriatur impenetrabilitas; illae quidem vires pro naturae legibus haberi debent, quas proinde leges supremus naturae Auctor suspendere et immutare potest, ideoque ad corporum essentiam non pertinent; quum essentias rerum immutabiles omnino esse et necessarias, demonstratum sit in

metaphysica. Nec minus difficilis atque implicata evadit quaestio in hypothesi leibnitiana, secundum quam *extensio*, *locus*, *spatium* pro meris phaenomenis haberi debent, ac proinde et pro mero phaenomeno haberi etiam posset impenetrabilitas, quae ex notione loci omnino pendet. Igitur in hac hypothesi extensio et impenetrabilitas sunt proprietates corporum *relativae* dumtaxat, non *absolutae* et *essentiales*. Sed quidquid sit de quaestionibus illis, nulla ingenii subtilitate umquam fortasse solvendis, certissimum est, inter universales corporis naturalis proprietates recensendam esse impenetrabilitatem.

Schol. III. Quod spectat ad corporum vires, *gravitatis* scilicet, *attractionis* et *inertiae*; illarum quidem virium effectus in rerum natura constanter observamus. Sed quid sint vires illae, an ad ipsam corporum essentiam pertineant, nobis omnino ignotum fatemur. Eas velut universales corporum proprietates habere nobis satis sit. In nostris enim institutionibus physicis effectus praesertim consideramus, eosque calculo, quantum nobis licet, aestimamus, quod quidem saepe vos monitos voluimus. Probe autem observari debet virium illarum notio; neque credendum est, sibi mutuo repugnare vim inertiae et vim attractionis. Re quidem vera, si omnes materiae partes sese mutuo attrahant, iam nulla erit perfecta quies in rerum natura, idque etiam verum erit in ipsa peripateti-

eorum sententia. Etenim secundum peripateticos coelestia omnia corpora, quae intuemur, in perpetuo sunt motu, et centrum gravium in ipso telluris centro positum est. Ac proinde necessarium est, ad cuiusvis lapidis iactum, aequilibrio nonnihil mutato, totam telluris molem commoveri. Id quidem vi inertiae contrarium videri posset; corpora enim tenderent ad motum. Verum dum dicimus, per vim inertiae corpora manere in quiete, seclusa vi qualibet impressa, res intelligenda est de quiete *apparente*. Atque hinc patet, qua ratione intelligi debeat *quiescibilitas* inter naturales materiae proprietates numeranda. Neque tamen dicendum est, materiae motum esse necessarium. Quum enim vim quamlibet motricem materiae indiderit supremus rerum omnium Auctor; hanc eamdem vim pro arbitrio potest auferre, et corpora hac proprietate exuere. Tandem patet, in iis, quae hactenus explicavimus, contineri etiam *figurabilitatem*, quae ex mutua attractione viriumque varietate pendet. Sed meminisse oportet, *vis* nomine nihil aliud a nobis intelligi nisi effectum aliquem. Itaque corpus naturale merito definivimus: substantiam sensibilem octo universalibus iam recensitis proprietatibus praeditam. Probe autem notandum est, proprietates illas a nobis dici *universales*, non *essentiales*. Si quis igitur corpus consideraret, omissa ex his proprietatibus aliqua, is quidem *incompletam* haberet corporis notionem, nec tamen

essentiale aliquod corporis attributum praetermisisse dici posset.

Schol. IV. Ex his, quae hoc in articulo explicavimus, lux fortasse accedere potest iis, quae de *materia*, *forma* et *privatione* obscure tradunt plerique scholastici. Adfirmant scilicet, omnium corporum principium esse materiam *primam*, formam et privationem. Materiam primam definiunt, *quod neque est quid, neque quantum, neque quale, neque quidquam eorum, quibus ens d enominatur.* Haec autem definitio ita potest intelligi, ut materiam *indeterminatam* et *abstracte* consideratam significet, non attenta illius forma. Verum ut fiat corpus aliquod *determinatum*, *formam substantialem* adiungi oportet. Vocant autem formam substantialem id, per quod singulae corporum species a se invicem differunt. Haec autem omnia, licet a veteribus philosophis paullo obscurius dicta, cum recentiorum opinionibus componi fortasse possent. Etenim si in corporibus admittamus vires quasdam *motrices*, *attractivas* scilicet et *repulsivas*, ex quibus oriatur specifica corporum differentia, vires illas pro formis substantialibus haberi, minime repugnat. Et quidem illas *substantiales* appellari, nihil absurdum est. Etenim quum diversa motus directio diversaque velocitas vi motrice diversa generentur; mutationes illae considerari possunt tamquam *modi*, qui proinde ad substantiam aliquam referri debent. Atque hinc contin-

git, ut vires motrices tamquam modorum subiectum ac proinde tamquam substantiae appareant. Qua de causa formae substantiales satis apte appellari potuerunt. Hanc explicationem a veteri philosophia non longe aberrare, colligitur ex ipsa formae substantialis definitione. Hanc enim his verbis definiunt peripatetici: *actus primus substantialis unum per se cum materia constituens principium motus et quietis per se et non per accidens.* Ex qua definitione oritur alia forma, quam *accidentalem* dicunt, quae nihil aliud est, quam *modificatio contingens.* Tandem quod spectat ad *privationem*, hoc vocabulum fecerunt peripatetici, ut distinguerent corpus *factum* et *actuale*, seu ut dicunt, *in facto esse*, a corpore *faciendo*, quod vocant *in fieri.* Corporis actualis duo distinguunt principia, materiam et formam. At corporis in fieri tria principia admittunt, materiam, formam et privationem. Et quidem formam substantialem praecedere debet privatio. Haec pauca de ceteris scholae opinionibus sine ullo partium studio observata sint, ut antiquos philosophos a recentiorum quorumdam reprehensione vindicemus. Aliqui enim recentiores nihil fere in veteri philosophia inveniunt, quod non rideant, et peripateticorum opinionibus sua non magis solida et probata substituunt dogmata, seu potius figmenta. Aristotelem virum fuisse ingenio excellentem, satis demonstrant plurima illius opera, quibus sane non parum hono-

ris et gloriae detraxerunt aliqui interpretes. At non sine maxima recentiorum iniuria negari posset, in effectuum observatione et cognitione longe feliciorem et locupletiorem esse hodiernam physicam, quamvis post longam saeculorum seriem circa effectuum causas nihil fere plus scire datum sit, nec fortasse dabitur umquam, donec rerum effectuumque omnium causam D. Opt. Max. aeternum intueamur.

APPENDIX.

De quibusdam capitis praecedentis utilitatibus.

I.

Amplissimam meditationum philosophicarum copiam suppeditat caput praecedens. Ex multis pauca utiliora seligemus. De summa corporum porositate perpetuisque effluviis sermonem habuimus. Hinc vero occasionem nacti, quotidianas corporis nostri nutritiones et vicissitudines contemplabimur. Accuratissimis observationibus compertum habuit Sanctorius, ex octo alimentorum libris, quas quis quotidie sumeret, quinquagesimam circiter partem in corporis substantiam converti. Sumta igitur quinquagesima parte 8 libr. provenient $5\frac{3}{25}$ semiunciae, quas scilicet singulis diebus adquirimus,

ac proinde per anni spatium corpori nostro accedunt 58 libr. 12 $\frac{4}{5}$ semiunciae, hoc est, plusquam tertia pars totius corporis. Tantumdem ergo per perennem dissipationem de corporis substantia decedere debet; alioquin in enormem excresceret molem. Iam vero si iactura eum in modum sese haberet, ut vetustissima corporis materia primum abiret, deinde quae proxime minus vetusta est, et sic per gradus ad recentissimas usque; manifestum est, ita omnino dissipari corporis nostri substantiam, ut post tres annos nihil vetustae materiae superstes esset, alia plane eius locum occupante. At quoniam veteres succedentesque particulae simul pro ratione utriusque quantitatis promiscue expelli debent, fieri non potest, ut omnis materia in auras evolet, etiamsi mille annos homo viveret. Rem exemplo illustrabimus. Ponatur vas aquae plenum, continens 150 libras, ex quibus hauriantur 5 $\frac{3}{25}$ semiunciae, et loco haustae aquae infundantur vini puri semiunciae 5 $\frac{3}{25}$. Sequenti die ex hoc mixto detrahantur iterum semiunciae 5 $\frac{3}{25}$, et dein adiiciantur 5 $\frac{3}{25}$ vini puri, et ita deinceps singulis diebus per annum integrum; quaeritur, quantum vini post annum futurum sit. Problematis huius solvendi modum indicabimus. 150 librae aquae confi-

ciunt 4800 semiuncias, ex quibus detractis $5 \frac{3}{25}$ semiunciis aquae, et iterum adfusa aequali quantitate vini puri, remanent in vase $4794 \frac{22}{25}$ semiunciae aquae cum $5 \frac{3}{25}$ semiunciis vini permixtae. Iam si secundo die ex hac mixtura rursus detrahas $5 \frac{3}{25}$ semiuncias, et tantumdem vini puri adiicias; illae semiunciae detractae $5 \frac{3}{25}$ non ex aqua pura constabunt, sed tantillum vini continent, quod in eadem portione erit ad aquam, ut $5 \frac{3}{25}$ ad $4794 \frac{22}{25}$, id est, numerus semiunciarum aquae residuae post secundam detractionem erit tertius proportionalis ad 4800 et $4794 \frac{22}{25}$, quod quidem evidens est. Simili ratione, tertio die detractis ex mixto semiunciis $5 \frac{3}{25}$, patet, numerum semiunciarum aquae residuae esse quartum proportionalem ad 4800 et $4794 \frac{22}{25}$ et ita porro. Ergo completo anno, scilicet per 365am extractionem, residuae aquae pondus habebitur sumendo 366am proportionalem ad 4800 et $4794 \frac{22}{25}$, seu evehendo $4794 \frac{22}{25}$ ad 365am potestatem, et dividendo per numerum 4800 itidem

ad 364am potestatem evectum, quod quidem laboriosissimum per plures menses calculum postularet. At rem per *logarithmorum* tabulas compendiose absolvunt algebristae, inveniuntque post completum annum remansuras in vase $3251 \frac{1}{5}$ semiuncias aquae, ideoque $1548 \frac{4}{5}$ semiuncias vini. Exemplum ad praesentem casum transferatur. Aquae purae 150 librae repraesentent materiam, ex qua corpus componitur, $5 \frac{3}{25}$ semiunciae vini puri quotidie infusi referant novam materiam corpori nostro singulis diebus additam, erit materia vetus semiunciarum $3251 \frac{1}{5}$ seu libr. 101 et semiunciarum $19 \frac{1}{5}$. Nova autem substantia erit libr. 48, semiunciarum $12 \frac{4}{5}$. Itaque corpus humanum tertiam fere substantiae partem post annum integrum amittet, et protracto calculo invenitur, elapso decennio superstitem futuram esse dumtaxat partem quinquagesimam. Praetermittendum tamen non est, a nobis positum fuisse, omnes corporis partes aequabiliter aut uniformiter dissipari; quamquam certissimum sit, ossium dissipationem multo lentiorem esse, quam partium fluidarum. Sed quidquid sit, ex his saltem manifestum est, in corporibus nostris velocissimam mutationem contin-

gere, atque huic perpetuae vicissitudini obnoxias quoque esse durissimas corporis nostri partes. Et quidem nullum est in corpore animali os tam durum, tam compactum, quod non nutriatur, ac proinde quod non mutetur, et partem sui amittat, novamque recuperet.

¿Ecquis non mirabitur omnipotentem Dei manum, quae in corporis nostri structura tot subtilissima disposuit instrumenta ad nutritionem et evaporationem necessaria? At singulos aetatis humanae gradus diversosque corporis nostri status paullo attentius contemplemur. In puerili aetate partes sunt tenellae, viscosae, aqua abundant, infinitisque canaliculis perforatae, quos quidem canaliculos in ossibus, membranis, cartilaginibus, vasorum tunicis, tendinibus et in cute ipsa demonstrant incisiones anatomicae. Hinc fit ut vis, quae in corpore animali motus principium est, quaecumque sit vis illa, molliores partes facilius extendat. Progressu temporis robustiores fiunt partes, atque confirmantur, in adulta scilicet aetate; atque id tamdiu fit, donec tandem extendendis solidis haud amplius satis sint cordis vires. Attamen facile adhuc flexibilis manet *cellularis* textura, multis in locis pinguedinem sanguinemque admittit: hinc pinguiores fiunt adulti ad certum usque tempus, nec tamen crescunt. Provecta aetate textura cellularis fit crassior: rigescunt senum ossa: cartilagines in ossa convertuntur: vasa excretoria

comprimuntur: minima orificia clauduntur: secretiones minuuntur: sanguis exsiccatur, et in singulis corporis partibus terrestrem velluti humorem deponit. Hinc partes omnes duriores observantur: hinc crustae osseae in ipsis arteriis, in ossium superficie et maxime in vertebris deprehenduntur. His gradibus ad senectutem mortemque ipsam pergimus. Solvitur tandem fragilis haec corporis nostri machina iterum reparanda et ad meliorem aeternamque vitam revocanda.

II. *Resurrectio mortuorum*, inquit Sanctus Augustinus *serm. 150. praecipua fides christianorum.* Et quidem *statutum est hominibus semel mori, post hoc autem iudicium:* ait Sanctus Paullus *ad Hebr. IX.* Itaque quum increduli quidam impiique homines ex iis, quae num. praeced. diximus, plurima obiiciant resurrectionis dogmati contraria; hinc officii nostri partes esse duximus sanctum illud religionis decretum spei timorisque plenum a cavillationibus vindicare. ¿Quomodo, inquiunt, eae corporis particulae, quae per insensibilem transpirationem adsidue evanescunt, in idem corpus iterum coalescent? Illae eaedem particulae in alia corpora, in aliorum hominum substantiam transeunt. Obiectioni vim addere conantur, fingendo hominum corpora ab animalibus carnivoris vel anthropophagis hominibus absumta. ¿Qua ratione fieri poterit, ut unusquis-

que carnem suam repetat atque revocet, quum unius hominis caro in carnem alterius transmigraverit? Porro quamvis *corporum resurrectio solius divinae potestatis opus sit, cuius causas et rationem temere quis investigaret*, ait Athenagoras *de mortuorum resurrectione*; everti tamen debent argumenta quibus fidem nostram oppugnare conantur religionis hostes. Igitur quamvis corporis nostri materia per sensibilem transpirationem avolaverit, et in belluae carnivorae aut barbari hominis substantiam transiverit; Deus eamdem discernet, et corpori, cuius erit, restituet. Particulae omnes, quae ab ortu ad mortem usque corpus nostrum per diversas aetates compegerunt, nobiscum non resurgent; tunc enim enormis magnitudinis monstra excitaremur. Deus eam nobis restituet, quam ipse decrevit, magnitudinem, de qua quidem magnitudine nihil fides docet. Nihil autem a ratione alienum est; immo ratio ipsa demonstrat, Deum omnipotentem dispersas materiae particulas, quae uniuscuiusque hominis substantiam per totum vitae decursum componebant, colligere et eligere posse, atque in eam, quam iubet, magnitudinem revocare: *ita modificabitur illa in unoquoque materies, ut nec aliquid ex ea pereat, et quod alicui defuerit, ille suppleat, qui etiam de nihilo potuit, quod voluit, operari*: ut ait Sanctus Augustinus *in enchirid. cap.90.*

Quamvis ergo mortuorum resurrectio et omnes, quae ad eam pertinent, mutationes *divinae sint potestatis opus*, altissimumque mysterium, id tamen rationi minime contrarium est. Et certa fide tenendum, omnes homines in propria carne resurrecturos, ante divini iudicis tribunal constituendos, ut probi donentur praemio, improbi autem supplicio mancipentur.

III. Quamvis in adorando eucharistiae sacramento potentiae, amoris et benevolentiae thesauros effuderit et explicaverit Christus Dominus; non desunt tamen ingratissimi impiissimique homines, qui ad oppugnandum illud divinae bonitatis mysterium, in disputationibus philosophicis de corporum natura ineptissimas cavillationes quaerunt, et audacissime iactitant. Cavendum quidem est, ne sacrosancta religionis mysteria curiosius scrutari atque explicare praesumant philosophi. Si enim opinio aliqua aut theologica aut philosophica mysterii rationem ita adferat, ut nullum fidei locum relinquat, haec statim reiicienda est atque detestanda. At omnes ingenii sui vires intendere debent religiosi verique philosophi, ut sanctissima fidei dogmata ab impiorum hominum conatibus defendant, eaque supra rationem esse, non tamen rationi contraria, ostendant. Quattuor sunt argumenta philosophica, quae novatores maxime iactare solent. Primum: *Corpus Christi simul*

esse in pluribus locis. Secundum: *Corpus Christi veras non habere corporis proprietates, non esse quantum, locum non occupare.* Tertium: *accidentia panis et vini remanere post factam consecrationem sine subiecto.* Quartum: *accidentia illa habere omnes proprietates substantiae.* Ex illis obiectionibus duae pertinent ad corpus Christi, duae aliae ad accidentia. Quae quidem omnes ex dictis de corporis natura facile refelluntur. Quod ad duas priores obiectiones spectat, patet, rationi contrarium non esse illum exsistendi modum, quo Christum in eucharistia exsistere, certa fide docemur. Etenim de ipsa corporis essentia non consentiunt inter se philosophi; immo plurimi apud ipsos novatores cultissimi doctissimique physici, extensionem et impenetrabilitatem ad corporis essentiam non pertinere, sine ulla dubitatione adfirmant; in qua quidem sententia duae priores obiectiones evanescunt. Certissimum omnino est, corpus Christi in eucharistia suam habere *quantitatem*; nempe partes re vera sunt diversae et extra se invicem positae, alioqui non esset corpus humanum. At quantitas illa, quam habet corpus Christi in eucharistia, dicit quidem extensionem partium *in ordine ad se*, seu per eam quantitatem fit, ut pars sit extra aliam partem; sed non dicit extensionem *in ordine ad locum*, hoc est, per eam non fit, ut pars occupet locum. Igitur corpus Christi in eu-

charistia nec *definitive* nec *circumscriptive* continetur. Non quidem definitive; nam corpus Christi contineri definitive sub *speciebus*, et sub illis ita exsistere, ut non sit alibi. Quod repugnat fidei, quae docet, Christum esse in coelis et in hostiis consecratis. Neque continetur circumscriptive; nam contineri circumscriptive est respondere variis spatii partibus; at corpus Christi non respondet variis spatii partibus, quum non habeat extensionem impenetrabilem. Ille quidem exsistendi modus nullum in rebus creatis exemplum habet, et miraculis plenus est, ac proinde merito vocatur *sacramentalis*, seu modus, qui soli sacramento conveniat. At modum illum exsistendi absurdum non esse, et divinae omnipotentiae ac rationi non repugnare, patet ex iis, quae de extensione, impenetrabilitate, loco et spatio fuse disseruimus.

Quod spectat ad *accidentia*; accidentium nomine intelligunt panis et vini qualitates, *colorem*, *quantitatem*, *saporem*. Eae autem qualitates remanent in eucharistia, iis adficiuntur sensus nostri, facta consecratione. Qualitates illae a concilio lateran. IV. vocantur *panis et vini species*: a concilio constantiensi dicuntur: *accidentia panis et vini*; concilium tridentinum lateranensis concilii phrasim retinuit. Observandum est, duplicem a peripateticis distingui *quantitatem*, aliam *internam*, *externam* aliam. Primam di-

cunt partes *entitativas* et *substantiales*, quae ita sunt de essentia corporis, ut iis sublatis destruatur corpus. Haec quantitas corpus extendit in ordine ad se, hoc est, partes entitativas alias extra alias ita constituit, ut entitas partis unius tota sit extra entitatem partis alterius, et tamen omnes in eodem loco reperiantur. Quantitas externa nihil est aliud, quam extensio sensibilis, quae partes iam extensas in ordine ad se extendit in ordine ad locum. Haec peripateticorum opinio aliqua ex parte convenit cum hypothesi leibnitiana, quae corporum partes ab ipsa extensione distinguit, sed extensionem sensibilem veluti merum phaenomenon, non tamquam aliquid substantiale aut accidens absolutum admittit. De fide est, accidentia remanere sine subiecto *substantiali* panis et vini; at de fide non est, ea non habere subiectum aliquod accidentale. Accidentia manere, aiunt plerique theologi, in panis et vini quantitate, *externa* scilicet, quae remanet in eucharistia consecrata, et quantitatem illam aliasque sensibiles qualitates *accidentia absoluta* appellant, eo quod sine ullo subiecto maneant. Novam opinionem excogitavit, aut saltem maxime illustravit atque amplificavit Magnanus noster. Species sensibiles, quas *intentionales* vocat, non aliud esse docet, quam actionem ipsam obiectorum in sensus. Quum autem in eucharistia non supersit panis sub-

stantia, in sensus illa agere non potest. Sed Deus per se ipsum soloque imperio supplet actionem substantiae panis, facta in sensibus nostris eadem *modificatione* sive impressione, quam panis ante consecrationem producebat. Vnum heic diligenter monere oportet, concilia lateranense, florentinum et tridentinum *accidentium* nomen non usurpasse, sed *specierum*. Quae quum ita sint, catholica fide certum ac definitum non est, accidentia absoluta ad fidem pertinere. Sed hoc certissime tenendum est, totam panis et vini substantiam converti seu transmutari in corpus et sanguinem Christi; species vero seu accidentia remanere, fidei auctoritate et sensuum iudicio indubitatum est. Verum quid sint, et in quo consistant species illae, ecclesia non pronuntiavit. Quamobrem dum synodus constantiensis damnavit hanc Wicleffi propositionem: *in eucharistia non manent accidentia sine subiecto*, censent theologi, censuram non cadere in accidentia, sed in accidentium subiectum, scilicet in substantiam panis et vini, quam superesse dicebat Wicleffus. Quod autem ad nutritionem spectat, responderi solet, vel Deum aliam substituere materiam, qua corpora nutriantur, vel per se corpora nostra sustentare; qui enim corpora ex nihilo produxit, potest haud dubie illa sustentare ac nutrire. Itaque ex his omnibus concludere licet, sacrosanctum eucharistiae myste-

rium incomprehensibile quidem esse et ineffabile, non tamen a divina omnipotentia et ratione alienum. Quare hanc appendicem absolvemus concilii tridentini verbis *sess. 13. cap. 1.* ubi sermo est de ratione, qua Christus est in eucharistia; *quam etsi verbis exprimere vix possumus, possibilem tamen esse Deo, nos cogitatione per fidem illustrata, adsequi possumus, et constantissime credere debemus.* Quae quidem verba non de hoc sacramento tantum, sed de aliis omnibus fidei nostrae mysteriis sancte tenenda sunt.

FINIS.

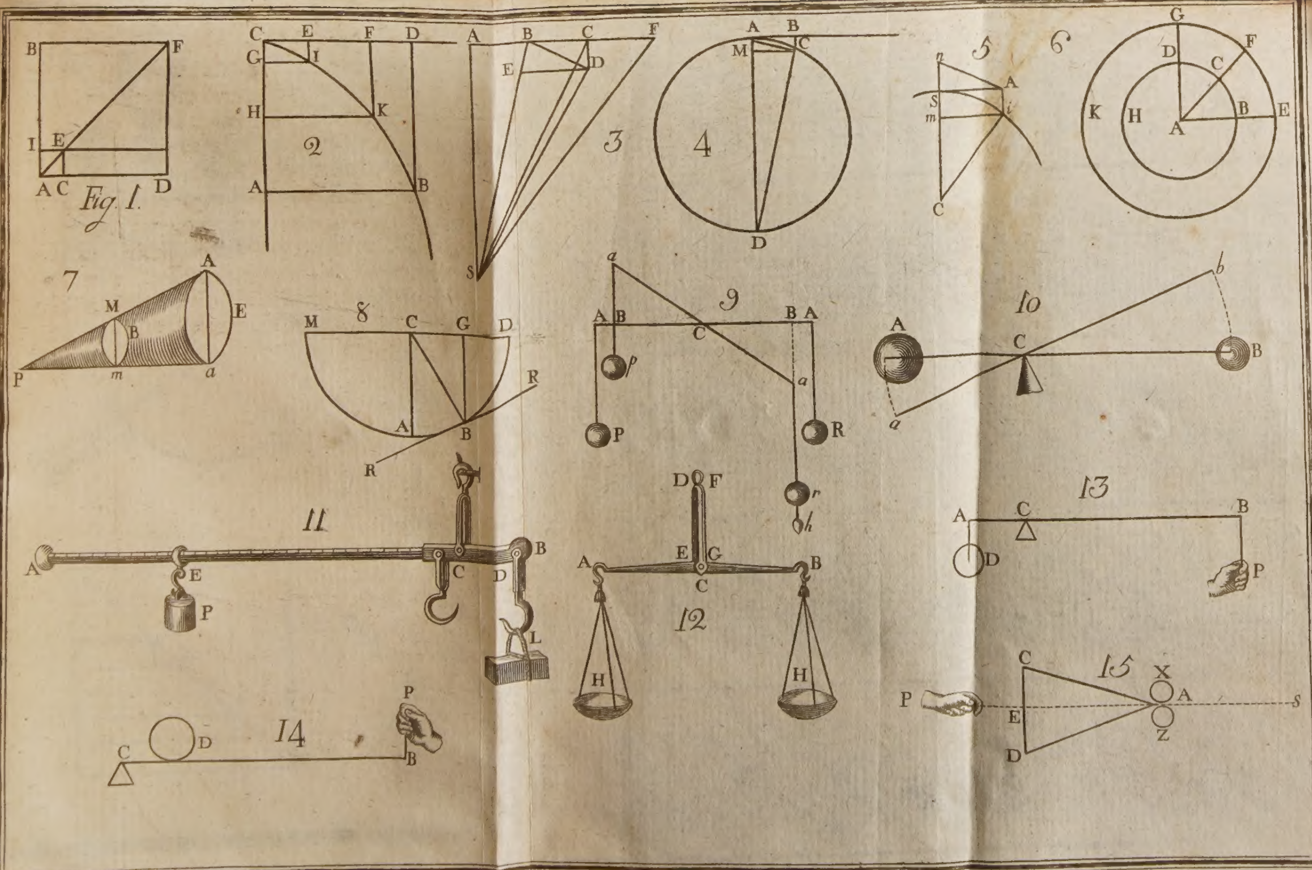
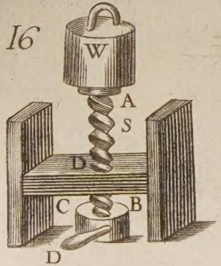
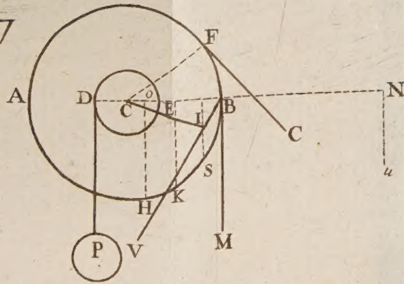

Fig. I.
B F I E A C D
2
C E F D G I H K A B
3
A B C F E D S
4
A B M C D
5
n A S m i C
6
G D F C K H B E A
7
A M B E P m a
8
M C G D R A B R
9
a A B B A C p a P R r h
10
b A C B a
11
A E P C D B L
12
D F E G A B C H H
13
A C B D P
14
C D B P
15
C X A P E Z D S

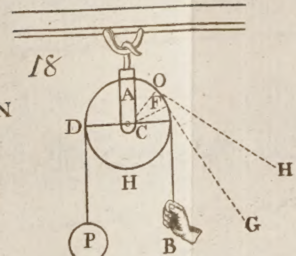
Fig. 16



17



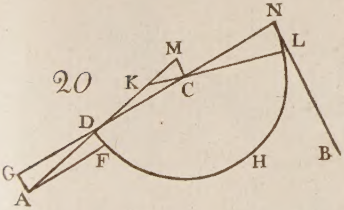
18



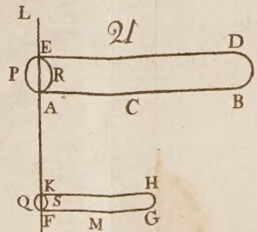
19



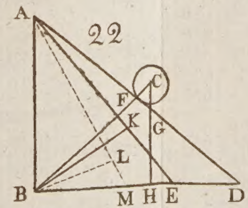
20



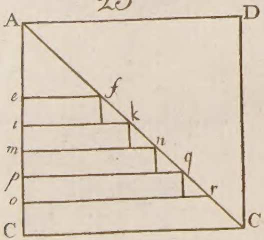
21



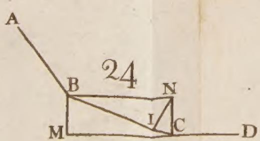
22



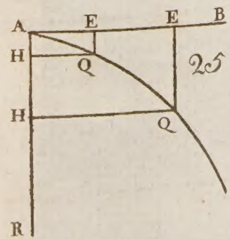
23



24



25



26

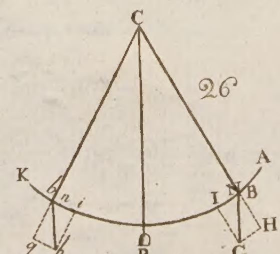
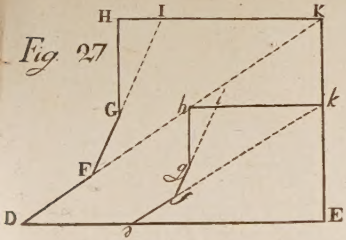
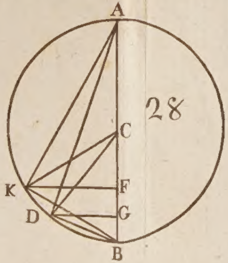


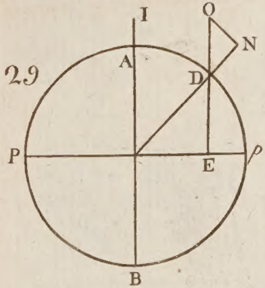
Fig. 27



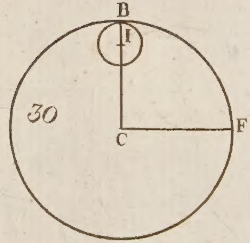
28



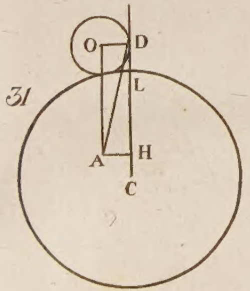
29



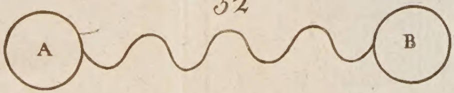
30



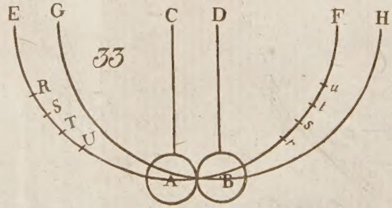
31



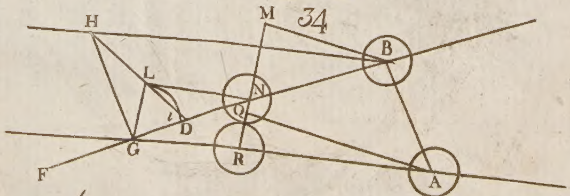
32



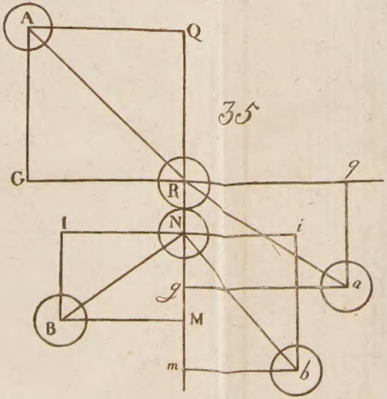
33



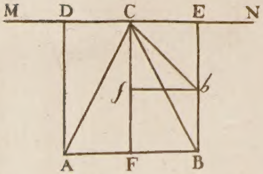
34



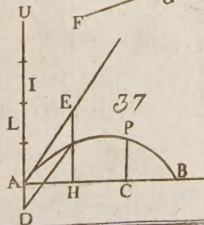
35



36



37





24